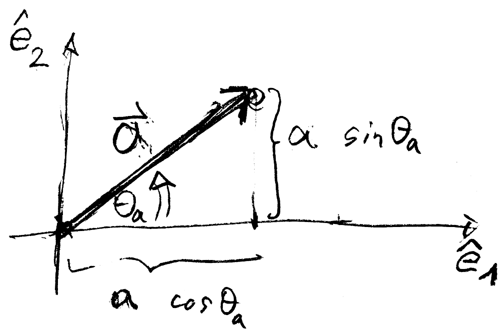
3. Vektoren und Matrizen

Das Blatt soll bis Donnerstag, den 6. Mai, 12:00, bearbeitet werden und dann als PDF-Datei in Moodle abgegeben werden. Die Aufgaben 1, 2 und 7 sind zum Üben und zum Vertiefen gedacht. Ebenso wie die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben sollen sie nicht abgegeben werden.

Üben

3.1. Geometrische und algebraische Form des Skalarproduktes

Die Skizze rechts zeigt den Vektor $\mathbf{a}$ in der Ebene und seine Darstellung als Linearkombination von zwei orthonormalen Vektoren $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2)$,



$$\mathbf{a} = a \cos\theta_a \, \hat{\boldsymbol{e}}_1 + a \sin\theta_a \, \hat{\boldsymbol{e}}_2$$

Dabei ist a die Länge des Vektors $\mathbf{a}$,
und $\theta_1 = \angle(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \mathbf{a})$.

a) Zusätzlich zu $\mathbf{a}$ betrachten wir einen weiteren Vektor $\mathbf{b}$ mit der Darstellung

$$\mathbf{b} = b \cos\theta_b \, \hat{\boldsymbol{e}}_1 + b \sin\theta_b \, \hat{\boldsymbol{e}}_2$$

Verwenden Sie die Rechenregeln für Vektoren, um zu zeigen, dass

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \, b \, \cos(\theta_a - \theta_b)$$

Hinweis: Beachten sie das Resultat aus Aufgabe 2.4.

b) Man kann auch Koordinaten verwenden, um das Skalarprodukt zu berechnen. Wir schreiben

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit $a_1 = a\cos\theta_a$ und $a_2 = a\sin\theta_a$, sowie $b_1 = b\cos\theta_b$ und $a_2 = b\sin\theta_b$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ für diese beiden Vektoren und vergleichen Sie das Resultat.

3.2. Tauziehen

Drei Muskelprotze probieren mit Stricken einen zehn Zentner schweren Stein aus einem Acker zu ziehen. Sie können jeweils mit eine Kraft von Maximal 2 kN ausüben und ihre Stricke müssen dazu in einen Winkel von mindestens 30° auseinanderlaufen.

a) Welche Masse M hat der Stein in SI-Einheiten?

b) Skizzieren Sie die an den Stein angreifenden Kräfte und deren Summe.

c) Wie groß ist die an den Stein angreifende Kraft F_M?

d) Der Stein stellt der angreifenden Kraft eine Haftreibung entgegen, deren Betrag $\mu M g$ nicht überschreiten darf. Dabei ist $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ die Fallbeschleunigung im Gravitationfeld ist. Wie groß darf der Reibungskoeffizient μ höchstens sein, damit die Männer den Stein bewegen können?

Aufgaben

3.3. Linear Abhängigkeit von drei Vektoren in 2D

Jeder Vektor $\mathbf{v}$ eines zweidimensionalen Vektorraumes kann *eindeutig* als Linearkombination von zwei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ dargestellt werden,

$$\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$$

In dieser Aufgabe untersuchen wir diese Aussage für $\mathbb{R}^2$ mit den in der Vorlesung eingeführten Regeln für Addition und skalare Multiplikation.

a) Geben Sie drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{v}$ an, so dass $\mathbf{v}$ *nicht* als Linearkombination von $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ dargestellt werden kann.

b) Im Folgenden untersuchen wir

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Zahlen α und β, so dass

$$\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal sind. Wie würden Sie dann α und β bestimmen, wenn die Vektoren auch die Länge eins hätten? Was muss man berücksichtigen, dass sie eine anderen Länge haben?

c) Betrachten Sie nun auch noch einen dritten Vektor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ermitteln Sie zwei unterschiedliche Zahlentripel (α, β, γ) mit der Eigenschaft, dass

$$\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

Welche allgemeine Regel müssen (α, β, γ) erfüllen, damit $\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Was bedeutet dies für die Anzahl der möglichen Lösungen?

d) Diskutieren Sie die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ durch Untersuchung der Lösungen folgender Gleichung

$$\mathbf{0} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

Wie hängen die Bedingungen für die Darstellung des Nullvektors zusammen mit jenen, die wir in Aufgabenteil c) fanden?

3.4. Basisdarstellungen von Polynomen

Wir betrachten Polynome $\mathbb{P}_N$ vom Grad N mit reellen Koeffizienten p_k, $k \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathbb{P}_N := \left\{ \mathbf{p} = \left(\sum_{k=0}^{N} p_k\, x^k \right) \quad \text{mit} \;\; p_k \in \mathbb{R},\; k \in \{0, \dots, N\} \right\}$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}_N, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist, wenn man folgende Verknüpfungen einführt,

$$\forall \quad \mathbf{p} = \left(\sum_{k=0}^{N} p_k\, x^k\right) \in \mathbb{P}_N\,, \quad \mathbf{q} = \left(\sum_{k=0}^{N} q_k\, x^k\right) \in \mathbb{P}_N\,, \text{ und } \; c \in \mathbb{R} \;:$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \left(\sum_{k=0}^{N} (p_k + q_k)\, x^k\right) \qquad \text{und} \qquad c \cdot \mathbf{p} = \left(\sum_{k=0}^{N} (c\, p_k)\, x^k\right)\,.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \left(\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\sum_{k=0}^{N} p_k\, x^k\right) \left(\sum_{j=0}^{N} q_j\, x^j\right)\right)\,,$$

ein inneres Produkt auf diesem Vektorraum definiert.

c) Zeigen Sie, dass die drei Polynome $\mathbf{b}_0 = (1)$, $\mathbf{b}_1 = (x)$ und $\mathbf{b}_2 = (x^2)$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_2$ bilden: Für jedes Polynom $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2$ gibt es reelle Zahlen x_k, $k \in \{0, 1, 2\}$, so dass $\mathbf{p} = x_0\, \mathbf{b}_0 + x_1\, \mathbf{b}_1 + x_2\, \mathbf{b}_2$. Allerdings gilt im Allgemeinen $x_i \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}_i$. Woran liegt das?
Hinweis: Ist die Basis orthonormal?

d) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_0 = (1)\,, \qquad \hat{\mathbf{e}}_1 = \sqrt{3}\,(2\,x - 1) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \sqrt{5}\,(6\,x^2 - 6\,x + 1)$$

orthonormal sind.

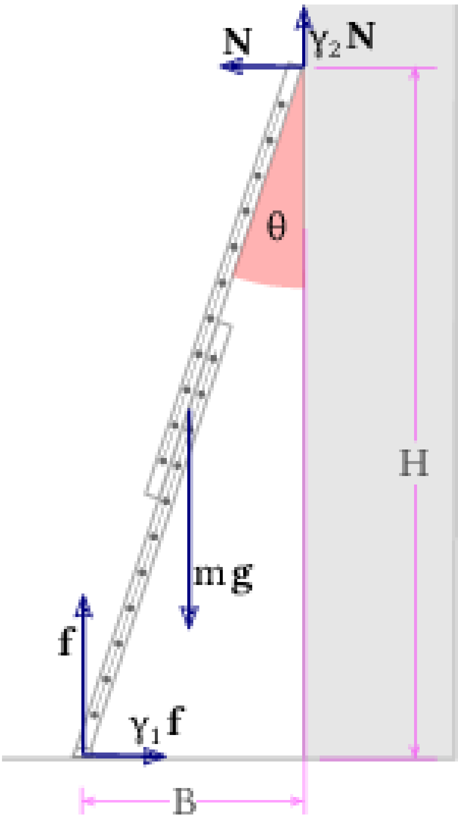
e) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2$ als Linearkombination von $(\hat{\mathbf{e}}_0, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ geschrieben werden kann,

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_0)\, \hat{\mathbf{e}}_0 + (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1)\, \hat{\mathbf{e}}_1 + (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2)\, \hat{\mathbf{e}}_2\,.$$

Daher bilden $(\hat{\mathbf{e}}_0, \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{P}_2$.

⋆ f) Ermitteln Sie eine Konstante c und einen Vector $\hat{\mathbf{n}}_1$, so dass $\hat{\mathbf{n}}_0 = (c\, x)$ und $\hat{\mathbf{n}}_1$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{P}_1$ bilden.

3.5. Forces acting on a ladder



Original: Bill Bradley – Vector: Sarang
[Public domain from wikimedia]

Die Skizze links zeigt eine Leiter der Masse m, die an einer Wand lehnt. Der eingezeichnete Winkel bezüglich des Lots bezeichnen wir als θ. Auf die Leiter wirkt die Gravitationskraft $m\,\mathbf{g}$. An dem Punkt, an dem die Leiter an der Dachrinne lehnt, wirkt die Normalkraft $\mathbf{N}$ auf die Leiter. Am Boden wirkt weiterhin eine Normalkraft $\mathbf{f}$, die verhindert, dass die Leiter einsinkt und Reibung am Boden verursacht eine parallel zum Boden ausgerichtete Reibungskraft mit Betrag $\gamma\,|\mathbf{f}|$, wobei γ kleiner ist als der Haftreibungskoeffizient μ.

a) Im Prinzip gibt es auch noch eine Reibungskraft von der Dachrinne auf die Leiter mit Betrag $\gamma_2\,N$. Wie kannt man begründen, dass dies Kraft vernachlässigt werden darf?
   Anmerkung: Es gibt mindestens zwei gute Gründe.

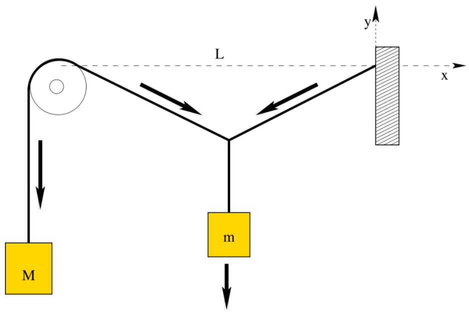
b) Bestimmen Sie die horizontal wirkenden Kraftkomponente der an die Leiter angreifenden Gesamtkraft. Gibt es eine eindeutige Lösung?

c) Die Leiter beginnt auf dem Grund zu rutschen, wenn eine Kräftebilanz nur möglich ist mit Koeffizienten γ größer als der Haftreibungskraft μ. Welche Bedingung ergibt sich daraus für den Winkel θ?
   Nehmen Sie an, dass $\gamma \simeq 0.3$. Bei welchem kritischen Winkel fängt die Leiter dann an zu rutschen?

d) Welche Rolle spielt die Masse der Leiter? Können Sie das ohne Rechnung begründen?

3.6. Aufhängung von Laternen und Oberleitungen

Eine Laterne der Masse m wird an der rechten Straßenseite mittels eines Ankers in einer Wand und an der linken Seite mit einer Umlenkrolle und einem Gewicht der Masse M befestigt (siehe Skizze). Diese Art der Befestigung findet man auch oft bei Oberleitungen von Bahnen und Straßenbahnen.



a) Beschriften Sie: Die Gewichtskraft des Gewichtes M sei $\mathbf{F}_M$; die Gewichtskraft der Lampe $\mathbf{F}_m$; die Kraft entlang des Seiles zur Linken der Lampe $\mathbf{F}_1$ und die zu ihrer Rechten $\mathbf{F}_2$.

b) Die Aufhängung der Umlenkrolle übt eine Kraft $\mathbf{F}_R$ auf die Rolle aus, so dass sie sich nicht bewegt. Wie hängt diese Kraft mit den in Aufgabenteil (a) eingeführten Kräften zusammen? Ermitteln Sie die Kraft graphisch und tragen Sie sie in die Skizze ein.

c) Es sei $m = 15$ kg und $M = 80$ kg. Berechnen Sie den Winkel α zwischen der horizontalen und dem Aufhängeseil, wenn die Lampe genau in der Mitte zwischen Wand und der Rolle hängt. Bestimmen Sie $|\mathbf{F}_R|$.

d) Der Winkel α ist eine Funktion des Massenverhältnisses m/M. Wieso konnte man dies erwarten? Ermitteln Sie die Funktion $\alpha(m, M)$ und zeichnen Sie sie als Funktion von m/M. Was geschieht für $m > 2M$?
Hinweis: Der Aufbau lässt sich zu Hause leicht mit etwas Faden und zwei Gewichten nachstellen. Probieren Sie es aus! Für Photos und Messungen von $\alpha(m, M)$ vergeben wir Bonuspunkte.

⋆ e) Wie groß darf man die Masse M höchstens wählen, wenn der Anker in der Wand eine maximale Zuglast von $14,0$ kN halten kann? Wie groß ist dann der Winkel α?

⋆ f) Warum sollte man nie ein Seil horizontal zwischen zwei Ankern verspannen, und dann eine Lampe daranhängen? Was ist der Vorteil der für die Laternen verwendeten Aufhängung, wenn es zum Beispiel einen heftigen Eisregen gibt und das Gewicht der Laterne aufgrund des daran hängenden Eises stark zunimmt?

Bonus-Aufgabe

3.7. Lineare Gleichungssysteme als Vektorraum

Ein Sysem N linear Gleichungen mit M Variablen $x_1, \ldots x_M$ besteht aus N Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1M}\, x_M \\ b_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2M}\, x_M \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ b_N &= a_{N1}\, x_1 + a_{N2}\, x_2 + \cdots + a_{NM}\, x_M \end{aligned}$$

wobei $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $j \in \{1, \ldots, M\}$.

a) Zeigen Sie, dass linear Gleichungen $(\mathbb{L}_M, \mathbb{R}, +, \cdot)$ aufgefasst werden können als Vektorraum mit folgender Vorschrift für die Summe von Vektoren und die skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \forall \quad & \mathbf{p} = \big[p_0 = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_M\, x_M\big] \in \mathbb{L}_M\,, \\ & \mathbf{q} = \big[q_0 = q_1\, x_1 + q_2\, x_2 + \cdots + q_M\, x_M\big] \in \mathbb{L}_M\,, \\ & c \in \mathbb{R}\ : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + \mathbf{q} &= \big[p_0 + q_0 = (p_1 + q_1)\, x_1 + (p_2 + q_2)\, x_2 + \cdots + (p_M + q_M)\, x_M\big] \\ c \cdot \mathbf{p} &= \big[c\, p_0 = c\, p_1\, x_1 + c\, p_2\, x_2 + \cdots + c\, p_M\, x_M\big]\,. \end{aligned}$$

Wie stehen diese Operationen in Beziehung zur Gauss-Elimination zur Lösung des Gleichungssystems?

b) Das Gleichungssystem kann auch in folgender Form geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{N1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{N2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1M} \\ a_{2M} \\ \vdots \\ a_{NM} \end{pmatrix} x_M$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathbf{b} = x_1\, \mathbf{a}_1 + x_2\, \mathbf{a}_2 + \cdots + x_M\, \mathbf{a}_M$$

wobei $\mathbf{b}$ mittels der Zahlen $x_1, \ldots, x_M$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_M$ ausgedrückt wird. Welche Interpretation hat dies zur Folge für die Regeln bezüglich der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen linearer Gleichungssysteme?