

## 2. Mengen, Gruppen, Körper

Das Blatt soll bis Donnerstag, den 29. April, 12:00, bearbeitet werden und dann als PDF-Datei in Moodle abgegeben werden. Die Aufgaben 1 und 7 sind zum Üben und zum Vertiefen gedacht. Ebenso wie die mit  $\star$ ,  $\hat{=}$  und  $\hat{=}$  gekennzeichneten Aufgaben sollen sie nicht abgegeben werden. Mit  $\hat{=}$  gekennzeichnete Aufgaben erfordern in der Regel einiges Nachdenken.

### Üben

#### 2.1. Substitution mit trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels der vorgeschlagenen Substitution

$$\int_{q(x_1)}^{q(x_2)} dq f(q) = \int_{x_1}^{x_2} dx q'(x) f(q(x))$$

wobei die Funktion  $q(x)$  bijektiv sein soll auf dem Integrationsintervall  $[a, b]$ .

- a)  $\int_a^b dq \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$  durch Substituieren  $q(x) = \sin x$
- b)  $\int_a^b dq \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$  durch Substituieren  $q(x) = \sinh x$
- c)  $\int_a^b dq \frac{1}{1+q^2}$  durch Substituieren  $q(x) = \tan x$
- d)  $\int_a^b dq \frac{1}{1-q^2}$  durch Substituieren  $q(x) = \tanh x$

### Aufgaben

#### 2.2. Mengenrelationen

Es gibt vier paarweise verschiedenen Elemente  $A, B, C, D$ . Verwenden Sie die Symbole  $\in, \notin, \ni, \not\ni, \subset, \not\subset, \supset, \not\supset, =$  in den Kästchen, so dass wahre Aussagen entstehen!

- a)  $\{A, B\} \square \{A, B, C\}$ ,

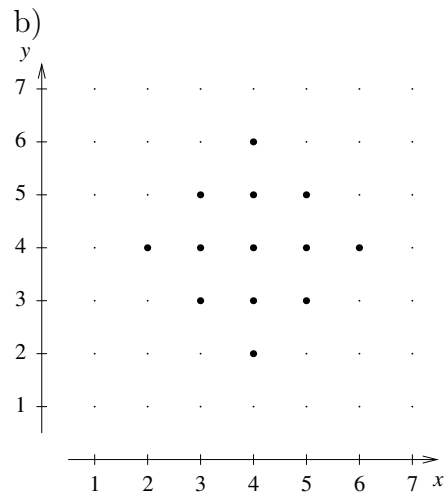
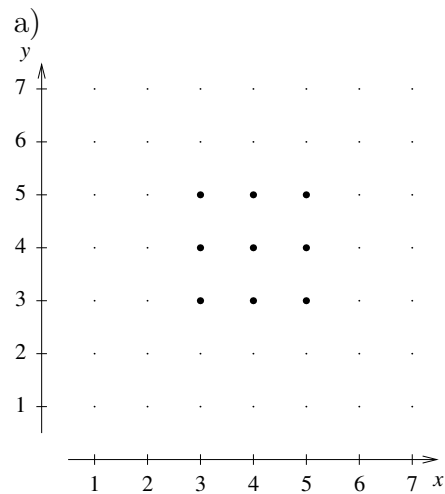
- b)  $\{A\} \sqsubset B$ ,
- c)  $\{\emptyset\} \sqsubset \emptyset$ ,
- d)  $\{\{A\}\} \sqsubset \{\{A\}, \{B\}\}$ ,
- e)  $A \sqsubset \{A, B, C\}$ ,
- f)  $\{A, C, D\} \cap \{A, B\} \sqsubset \{A, B, C, D\}$ ,
- g)  $\{A, C, D\} \setminus \{A, B\} \sqsubset \{A, B, C\}$ ,
- h)  $\{A, C, D\} \cup \{A, B\} \sqsubset A$ .

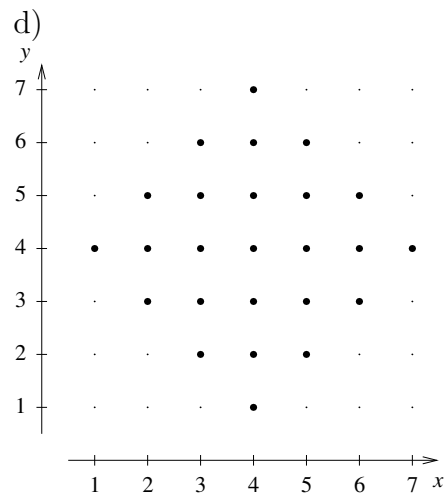
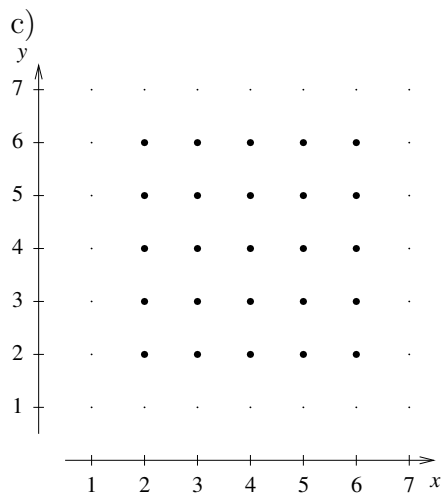
### 2.3. Von der Schwierigkeit, Kreise zu zeichnen

Im Reich reeller Zahlen beschreibt die Menge  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$  eine ausgefüllte Kreisfläche.

Wir betrachten die Menge  $N = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leq x, y \leq 7\}$ .

Welche der folgenden Teilmengen von  $N$  lässt sich in „Kreis“-Form  $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq r^2\}$  darstellen, und jeweils welche Werte von  $r$  sind möglich?





## 2.4. Eulers Formel und Additionstheoreme Trigonometrischer Funktionen

Eulers Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  etabliert eine Beziehung zwischen der komplexwertigen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

- Skizzieren Sie die Lage von  $e^{ix}$  in der komplexen Ebene und zeigen Sie auf, wie Eulers Formel mit dem Satz von Pythagoras in Beziehung steht.
- Die komplexe Argumente gelten für die Exponentialfunktion dieselben Rechenregeln wie für reelle Argumente; insbesondere gilt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

Vergleichen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Ausdrücke. Was impliziert dies für die Additionstheoreme Trigonometrischer Funktionen: Wie lassen sich  $\sin(x + y)$  und  $\cos(x + y)$  mittels  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin y$  und  $\cos y$  ausdrücken?

- Vereinfachen Sie Additionstheoreme für die Spezialfälle  $\sin(2x)$  und  $\cos(2x)$ .
- ★ Bestimmen Sie auch die Additionstheoreme für  $\sin(3x)$  und  $\cos(3x)$ .  
Hinweis: Verwenden Sie, dass  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . Suchen Sie die Regeln für das Pascalsche Dreieck, wenn Sie den allgemeinen Ausdruck für  $(a + b)^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht kennen.

## 2.5. Gruppen mit drei Elementen

Es sei  $(\mathcal{G}, \circ)$  eine Gruppe mit drei Elementen  $\{n, l, r\}$ , wobei  $n$  das neutrale Element ist.

- a) Zeigen Sie, dass es nur eine einzige Möglichkeit gibt für das Resultat der Verknüpfungen  $a \circ b$  mit  $a, b \in \mathcal{G}$ . Ermitteln Sie die Verknüpfungstabelle.
- b) Welcher Zusammenhang besteht zu den Rotationen eines gleichseitigen Dreiecks um  $120^\circ$ , d.h. Rotationen, die die Ecken des Dreiecks bei fester Lage austauschen.
- ★ c) Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung gibt  $m : \{n, l, r\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , die folgender Bedingung genügt:

$$\forall a, b \in \mathcal{G} : a \circ b = (m(a) + m(b)) \bmod 3.$$

Wir sagen, dass die Gruppe  $\mathcal{G}$  isomorph ist zu den natürlichen Zahlen modulo drei.

## 2.6. Eine Gruppe mit algebraischer und geometrischer Interpretation

Wir untersuchen die Menge  $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$  mit der Verknüpfung Multiplizieren und anschließendes Bilden der Quersumme bis man eine einstellige Zahl erhält. Zum Beispiel ist  $3 \circ 5 = 6$ , da das Produkt  $3 \cdot 5 = 15$  ist, mit Quersumme von 6. Für größere Zahlen muss man die Quersumme gegebenenfalls mehrfach berechnen. So ist  $7 \circ 8 = 2$ , da das Produkt  $7 \cdot 8 = 56$ , mit Quersumme 11 und beim nächsten Mal ergibt sich die 2.

Wir zeigen nun, dass  $(M, \circ)$  eine Gruppe ist und diskutieren die Beziehung zur Diedergruppe  $D_3$ .

- a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung kommutativ ist.
- b) Füllen Sie die Verknüpfungstabelle aus. Inwiefern hilft Ihnen die Information

dabei, dass die Verknüpfung kommutativ ist?

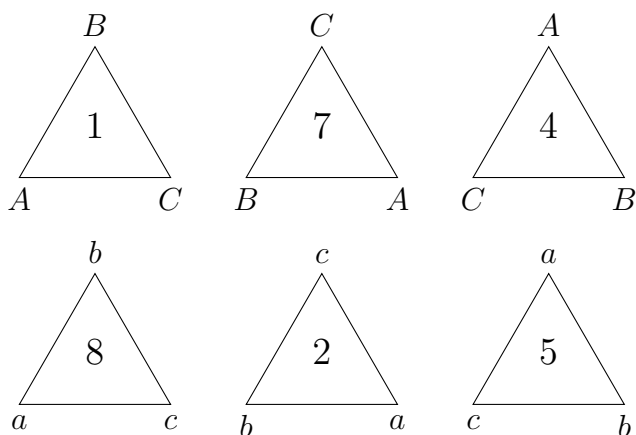
$\circ$	1	2	4	5	7	8
1						
2						
4						
5						
7						
8						

- ★ c) Verifizieren Sie auch durch eine explizite Rechnung, dass die Menge  $M$  abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung  $\circ$ .

**Anmerkung:** Dies folgt auch aus der Verknüpfungstabelle! Wie?

**Hinweis:** Beachten Sie an die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9.

- d) Was ist das neutrale Element der Verknüpfung?
- e) Was sind die inversen Elemente für die anderen Elemente von  $M$ ?
- f) Wir ordnen die Elemente nun wie folgt graphisch an:



Zeigen Sie, dass das Element 7 der **D**rehung dieser Dreiecke um  $120^\circ$  entspricht. Wir nennen es im Folgenden  $D$ .

Zeigen Sie weiterhin, dass das Element 8 ein **W**echseln der Beschriftung der Ecken von Groß- zu Kleinbuchstaben und zurück bewirkt. Wir nennen es im Folgenden  $W$ .

g) Wie kann man die Elemente der Gruppe durch  $D$  und  $W$  ausdrücken?

Sek2) Verwenden Sie die Kommutativität der Verknüpfung und die Darstellung der Gruppenelemente aus Aufgabenteil f), um die Assoziativität zu beweisen.

## Bonus-Aufgabe

### 2.7. Fangen sie das Schmugglerboot?

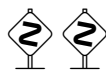
Ein Küstenwachboot am Ort  $K_0$  erhält bei Nacht und Nebel zum Zeitpunkt  $t = 0$  Uhr über Funk die Nachricht, dass sich ein Schmugglerboot am Ort  $S_0$ , genau 12.5 km westlich von ihm befindet. Das Schmugglerboot hört den Funkspruch ebenfalls und beginnt sofort, sich mit konstanter Höchstgeschwindigkeit,  $v_S = 12.5 \text{ km h}^{-1}$ , in eine bestimmte Richtung abzusetzen. Der Kapitän des Küstenwachboots, kennt zwar die Geschwindigkeit des Schmugglerboots, aber nicht die eingeschlagene Richtung. Er entwickelt daher folgenden Plan, um das Schmugglerboot einzuholen: Zunächst wartet er solange, bis das Schmugglerboots ihn theoretisch hätte erreichen können. Anschließend nimmt er Fahrt mit Höchstgeschwindigkeit,  $v_K = 48.5 \text{ km h}^{-1}$ , auf, wobei er darauf achtet, dass seine von  $S_0$  wegzeigende Geschwindigkeitskomponente stets  $v_S$  beträgt.

- a) Wieso könnte diese Strategie sinnvoll und erfolgreich sein?
- b) Bestimmen und skizzieren Sie die Bewegung des Küstenwachboots als Funktion der Zeit.



c) Um wie viel Uhr spätestens trifft das Küstenwachboots auf das Schmugglerboot?

**Hinweis:** Verwenden Sie Polarkoordinaten.



d) Die Reichweite des Küstenwachboots beträgt 800 Seemeilen. Welche Auswirkungen hat dies darauf das Schmugglerboot zu fangen?