

1. Grundlagen und Dimensionen

Das Blatt soll bis Donnerstag, den 22. April bearbeitet werden und dann als PDF-Datei in Moodle abgegeben werden. Die mit \star , \diamond und $\diamond\diamond$ gekennzeichneten Aufgaben sind zum weiteren Üben gedacht und sollen nicht abgegeben werden. Dabei bezeichnet \diamond Aufgaben, deren Lösung in der Regel einiges Nachdenken erfordert.

Aufgaben

1.1. Taylorentwicklung elementarer Funktionen

Siegfried Großmann gibt in seinem Buch die ersten Glieder der Taylorentwicklung einiger elementarer Funktionen. Verifizieren Sie die gegebenen Ausdrücke, indem Sie die Ableitungen der Funktionen bestimmen,

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (1+x)^n \approx 1+nx & \star \text{ c) } (1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} & \text{e) } \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \\ \text{b) } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} & \star \text{ d) } \tan x \approx x + \frac{x^3}{3} & \end{array}$$

Leiten Sie für folgende Funktionen jeweils auch das nächste Glied der Entwicklung her. Für das erste Beispiel ist die Lösung angegeben.

$$\begin{array}{ll} \text{f) } \frac{1}{1-x} \approx 1+x+x^2 & \text{h) } \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \text{_____} \\ \text{g) } \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \text{_____} & \text{i) } e^x \approx 1+x + \text{_____} \end{array}$$

1.2. Volumen und Oberflächen von Rotationskörpern

Einen Rotationskörper erhält man, indem man eine Funktion $f(x)$ um die x -Achse rotiert. Macht man dies für die Funktion $\sqrt{R^2 - x^2}$ mit $-R \leq x \leq R$ so erhält man eine Kugel vom Radius R . Das Volumen V und die Oberfläche O eines Rotationskörpers ist gegeben durch die Integrale

$$V = \pi \int dx (f(x))^2 \quad O = 2\pi \int dx f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

- a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ und vergewissern Sie sich, dass der Rotationskörper tatsächlich eine Kugel ist.
- b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche der Kugel durch Berechnen der angegebenen Integrale.

1.3. Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke

- a) Füllen Sie die Tabelle aus, indem Sie zunächst die Winkel in rad als Vielfache von π eintragen. Benutzen Sie sodann die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen, um die offenen Funktionswerte für die Sinus- und Cosinusfunktion zu ermitteln. Für einen Eintrag ist dies vorgeführt.

θ		$\sin \theta$	$\cos \theta$
°	rad		
0	-----	0	$\sin(\pi/2) = 1$
30	-----	$\frac{1}{2}$	-----
45	-----	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-----
60	-----	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-----
90	$\pi/2$	1	-----
120	-----	-----	-----
135	-----	-----	-----
150	-----	-----	-----
180	-----	-----	-----

- b) Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck, für welches einer der beiden anderen Winkel θ benannt werde. Wie stehen die Quotienten aus den Längen der Katheten und der Hypethenuse in Beziehung zu $\sin \theta$ und $\cos \theta$?

c) Welche Beziehung der trigonometrischen Funktionen folgt aus dem Satz von Pythagoras? Benutzen Sie diese Beziehung und die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen, um den Funktionswert für $\theta = \pi/4$ zu ermitteln.



d) Benutzen Sie nun weiterhin die trigonometrische Relation $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, um auch die angegebenen Werte für $\theta = \pi/6$ und $\theta = \pi/3$ zu berechnen.



e) Bestimmen Sie auch die Werte für $\pi/10$, $\pi/8$, und $\pi/5$.

1.4. Wasserwellen

Die Geschwindigkeit einer Welle in tiefem Wasser, d.h. bei Wassertiefen deutlich größer als die Wellenlänge, hängt nur von der Wellenlänge L und der Schwerebeschleunigung $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ ab.

a) Wie hängt die Wellengeschwindigkeit von L und g ab?

b) Die Höchstgeschwindigkeit einer Yacht ist gegeben durch die Rumpfgeschwindigkeit. Dies ist die Geschwindigkeit einer Welle mit derselben Länge wie der Schiffsrumpf. Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit einer 30 ft Yacht.

Hinweis: $1 \text{ ft} = 304.8 \times 10^{-3} \text{ m}$.

★ c) Oft wird der Faktor $7/23$ verwendet, um Fuß in Meter umzurechnen, d.h. man nimmt an, dass $7 \text{ m} = 23 \text{ ft}$. Wie gut ist diese Approximation?

1.5. Orbit der Erde um die Sonne

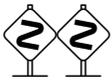
a) Licht legt den Weg von der Sonne zur Erde in 8 Minuten und 19 Sekunden zurück.

Welchen Abstand D hat die Sonne zur Erde?

Warum darf man für diese Abschätzung annehmen, dass das Licht 500 Sekunden unterwegs ist?

Hinweis: Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

- b) Die Periode der Erdbahn um die Sonne hängt ab vom Abstand D der Erde zur Sonne, der Masse der Sonne $M = 2 \times 10^{30}$ kg und der Gravitationskonstante $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m³/kg s². Schätzen Sie, basierend auf diesen Informationen ab wie lange die Erde für ihre Bahn um die Sonne benötigt. Geben Sie das Resultat an in SI-Einheiten.
- c) Geben Sie das Resultat aus (b) auch in Jahren an. Sie erhalten ein Resultat in der Größenordnung von einem Jahr, welches aber durchaus um einen erheblichen Faktor von Eins abweicht. Erkennen Sie den Zahlenwert des Faktors?



Bonus-Aufgabe

1.6. Fangen sie das Schmugglerboot?

Ein Küstenwachtboot am Ort K_0 erhält bei Nacht und Nebel zum Zeitpunkt $t = 0$ Uhr über Funk die Nachricht, dass sich ein Schmugglerboot am Ort S_0 , genau 12.5 km westlich von ihm befindet. Das Schmugglerboot hört den Funkspruch ebenfalls und beginnt sofort, sich mit konstanter Höchstgeschwindigkeit, $v_S = 12.5$ km h⁻¹, in eine bestimmte Richtung abzusetzen. Der Kapitän des Küstenwachtboots, kennt zwar die Geschwindigkeit des Schmugglerboots, aber nicht die eingeschlagene Richtung. Er entwickelt daher folgenden Plan, um das Schmugglerboot einzuholen: Zunächst wartet er solange, bis das Schmugglerboot ihn theoretisch hätte erreichen können. Anschließend nimmt er Fahrt mit Höchstgeschwindigkeit, $v_K = 48.5$ km h⁻¹, auf, wobei er darauf achtet, dass seine von S_0 wegzeigende Geschwindigkeitskomponente stets v_S beträgt.

- a) Wieso könnte diese Strategie sinnvoll und erfolgreich sein?
- b) Bestimmen und skizzieren Sie die Bewegung des Küstenwachtboots als Funktion der Zeit.



- c) Um wieviel Uhr spätestens trifft das Küstenwachtboot auf das Schmugglerboot?
Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.



- d) Die Reichweite des Küstenwachtboots beträgt 800 Seemeilen. Welche Auswirkungen hat dies darauf das Schmugglerboot zu fangen?