Blatt 12. Wiederholung und Vertiefung

Die Lösungen sollen bis Mittwoch, den 15. Juli, als PDF-Datei hochgeladen werden.

Aufgaben

12.1. Vektoren, Ableitungen und Phasenraumportraits

a) Höhenlinien sind Linien in der Zahlenebene (q, p), auf denen die Funktion $f(q, p)$ konstant ist. Skizzieren Sie charakteristische Höhenlinien von

$$f(q, p) = \frac{p^2}{2} - \sin q\,,$$

um einen Eindruck des Höhenprofils zu geben.

b) Ein Vektorfeld $\vec{K}(x, y)$ heißt konservativ, wenn man es als Gradient eines Potentials $U(x, y)$ schreiben kann. Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ:

$$\vec{K}_1(x, y) = (x + y, x + y)$$

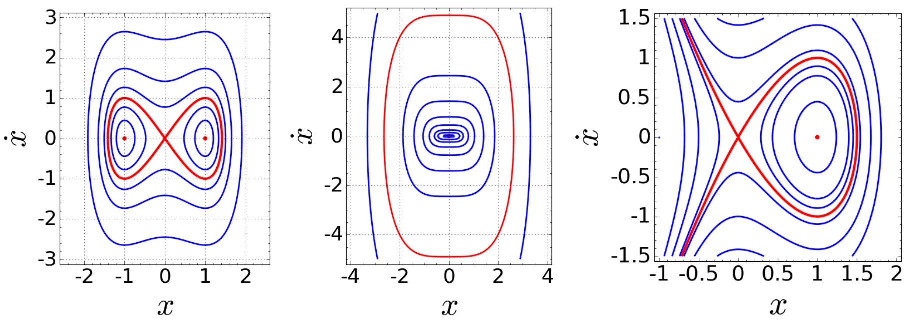
$$\vec{K}_2(x, y) = (x - y, x + y)$$

$$\vec{K}_3(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.
Skizzieren Sie für *eines* der konservativen Kraftfelder die Equipotentiallinien des Potentials und die zugehörigen Gradienten.

c) Die Abbildungen unten zeigen drei Phasenportraits der Differentialgleichung

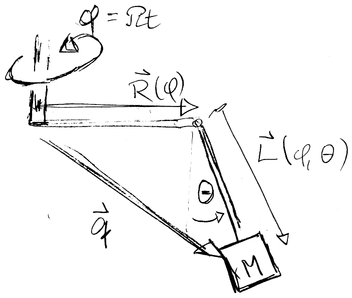
$$\ddot{x}(t) = a\,x + b\,x^2 + c\,x^3 \qquad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$



Diskutieren Sie, ob die Konstanten a, b und c jeweils positiv, negativ oder Null sind.

d) Interpretieren Sie x als Position eines Teilchens in einem Potential und skizzieren Sie die drei entsprechenden Potentiale.

12.2. Ein Karussell mit festen Stangen



Wir betrachten ein mathematisches Pendel mit Masse M an einem Pendelarm der Länge L, der an einem Ausleger der Länge R im Kreis bewegt wird. Die Bewegung von M entspricht also jener einer Person in einem Kettenkarussell. Zur Zeit t weist der Ausleger in die Richtung $\varphi = \Omega t$ in der Horizontalen. Der Vektor $\vec{R}(\varphi)$ beschreibt die Position der Aufhängung des Pendels.
Die Masse kann in der durch die die Senkrechte $\hat{z}$ und $\vec{R}$ definierten Ebene, um einen Winkel θ ausgelenkt werden. Der Vektor $\vec{L}(\theta, \varphi)$ weist von der Aufhängung des Pendels zur Masse M. Die Position $\vec{q}$ der Masse ist mithin gegeben durch

$$\vec{q} = \vec{R} + \vec{L}\,.$$

a) Wir beschreiben das System mit Zylinderkoordinaten, $\hat{R}$, $\hat{z}$ und $\hat{\varphi}$, wobei

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{R}\,.$$

Berechnen Sie $\hat{z} \times \hat{R}$ und zeigen Sie, dass $\hat{\varphi} = \partial_\varphi \hat{R}$.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{q}$ und $\dot{\vec{q}}$ für das gegenwärtige Problem die folgende Form haben

$$\vec{q} = (R + L\,\sin\theta)\,\hat{R} - L\,\cos\theta\,\hat{z}\,,$$
$$\dot{\vec{q}} = L\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,\hat{R} + (R + L\,\sin\theta)\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} + L\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\hat{z}\,.$$

c) Stellen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie V und die Lagrangefunktion auf. Zeigen Sie dann, dass θ der folgenden Bewegungsgleichung genügt

$$\ddot{\theta} = \Omega^2\,(\rho + \sin\theta)\,\cos\theta - \omega^2 \sin\theta\,. \tag{12.1}$$

Wie hängen die Konstanten ρ und ω ab von g, L und R?
Bonus: Wieso können ρ und ω nicht von M abhängen?

d) Zeigen Sie, dass

$$E_{\text{eff}} = \frac{\dot{\theta}^2}{2\omega^2} - \cos\theta - \frac{\alpha}{2}\,\big(\rho + \sin\theta\big)^2 \tag{12.2}$$

eine Konstante der Bewegung ist, wenn man α geeignet wählt. Wie muss man α dann wählen? Hinweis: Berechnen Sie die Zeitableitung von E_{eff} und verwenden Sie Gleichung (12.1), um α zu ermitteln.

e) Wir fassen E_{eff} auf als effektive Energie, $\dot{\theta}^2/2\omega^2$ als dimensionslose kinetische Energie und die verbleibenden Terme in Gleichung (12.2) als effektives Potential Φ_{eff}. Zeigen Sie, dass Φ_{eff} für $\rho = 0$ wie folgt geschrieben werden kann

$$\Phi_{\text{eff}}(z) = \Phi_0 - z + \frac{\alpha}{2}\,z^2 \qquad \text{mit} \qquad z = \cos\theta\,.$$

Dabei ist Φ_0 eine geeignet gewählte Konstante.
Zeigen Sie weiterhin, dass $\mathrm{d}\Phi_{\text{eff}}(z(\theta))/\mathrm{d}\theta = 0$ für $\theta = 0$, $\theta = \pi$, und für $\alpha z = 1$.

f) Es sei $\rho = 0$ und $\alpha > 1$. Skizzieren Sie $\Phi_{\text{eff}}(z(\theta))$ als Funktion von θ und den Fluss im Phasenraum $(\theta, \dot{\theta}/\omega)$.

   Es sei $\rho = 0$ und $\alpha < 1$. Skizzieren Sie $\Phi_{\text{eff}}(z(\theta))$ und den Fluss im Phasenraum $(\theta, \dot{\theta}/\omega)$.

g) Ist für die Energie für dieses Problem erhalten? Begründen sie Ihre Antwort? Wie stehen E_{eff} und $E = T + V$ in Beziehung zueinander?

h) Zeigen Sie, dass Φ_{eff} für $\rho > 1$ und $\alpha > 0$ nur ein Minimum hat und dass es zwei Minima haben kann, wenn $\rho < 1$. Was bedeutet $\rho > 1$ geometrisch und wie lässt sich dieses Resultat daher physikalisch interpretieren?

i) Wie ändert sich das effektive Potential für $\rho > 0$? Skizzieren Sie das Potential und den Fluss im Phasenraum für $\rho < 1$ und großes α, so dass Φ_{eff} nur ein Minimum hat.

12.3. Freilaufendes mathematisches Pendel

Wir stellen ein mathematisches Pendel mit Pendelarm der Länge ℓ und Gewicht der Masse m auf einen Wagen der Masse M, der sich auf einer horizontalen Schiene reibungsfrei bewegen kann. Die Position der Aufhängung des Pendelarmes sei $(x, 0)$. Bei einer Auslenkung θ befindet sich das Gewicht dann an der Position $(x + \ell \sin\theta, -\ell \cos\theta)$.

a) Skizzieren Sie den Aufbau.

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Wagens, die kinetische Energie des Gewichtes und die potentielle Energie des Gewichtes. Stellen Sie basierend auf diesen Resultaten die Lagrange-Funktion für das Pendel auf dem Wagen auf.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für x und zeigen Sie, dass sie auf eine Erhaltungsgröße von folgender Form führt

$$p_x = \alpha\,\dot{x} + \beta\dot{\theta}\,\cos\theta\,.$$

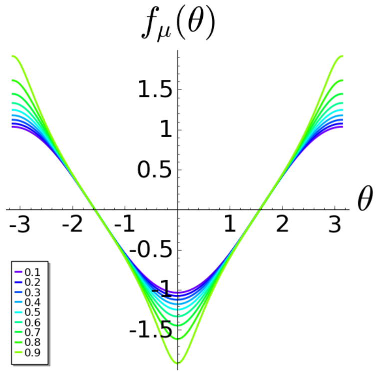
   Wie hängen α und β von den Parametern ℓ, m, M und g ab?

d) Bestimmen Sie die x-Komponente des Massenschwerpunktes von Pendel und Wagen. Welche Interpretation ergibt sich dann für das Resultat aus (c)?

e) Es sei im Folgenden $p_x = 0$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für θ dann bei geeigneter Wahl der Zeitskala folgende Form annimmt

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sin\theta}{1 - \mu\,\cos^2\theta} \tag{12.3}$$

   Welche Zeitskala wurde hier gewählt?
   Wie hängt μ von den Massen m und M ab?
   Bonus. Im Limes $\mu \to 0$ vereinfacht sich das Resultat aus (e) zur Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels. Wieso muss das so sein?

f) 

Gleichung (12.3) kann man einmal integrieren: multiplizieren Sie die Gleichung dazu mit $\dot{\theta}$ und verwenden Sie die Partialbruchzerlegung des Nenners basierend auf den Faktoren $1 \pm \sqrt{\mu}\cos\theta$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\mathcal{E} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + f_\mu(\theta)$$

bei passender Wahl von $f_\mu(\theta)$ erhalten ist.

g) Die Funktion $f_\mu(\theta)$ ist in der Abbildung oben geplottet. Für kleine μ ist $f_\mu(\theta) \simeq \cos\theta$. Für $\mu \to 1$ ergibt sich ein sehr schmales, sehr tiefes Potential. Was besagt dies über die Bewegung des Pendels in den beiden Grenzfällen?