Blatt 11. Bewegung starrer Körper

Die Lösungen sollen bis Montag, den 29. Juni, als PDF-Datei hochgeladen werden. Die mit gekennzeichneten Aufgabenteile sind zum vertiefenden Üben gedacht und brauchen nicht abgegeben werden. Der mit $\star$ gekennzeichneten Aufgabenteil ist nur verpflichtend, wenn Sie den Abschluss fürs Gymnasium anstreben.

Aufgaben

11.1. Höhenlinien und Gradienten

Skizzieren Sie die Höhenlinien und den Gradienten für die Funktion $F(x, y) = \sin x \ \cos y$.

11.2. Effektive Potentiale und Phasenraumportraits

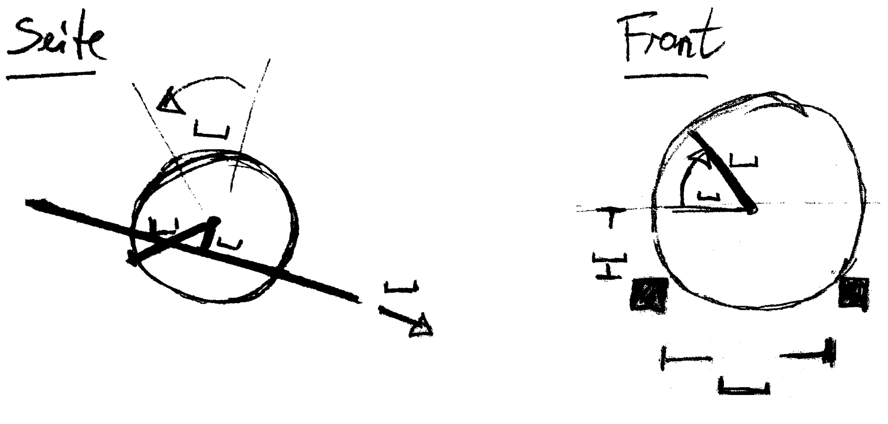
Skizzieren Sie jeweils das effektive Potential $V_{\text{eff}}(x)$ und die resultierenden Phasenraumportraits für die Bewegungsgleichung $\quad \ddot{x}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V_{\text{eff}}(x)$:

a) $V_{\text{eff}}(x) = x \ \sin x$ b) $V_{\text{eff}}(x) = x \ \cos x$

11.3. Kugel auf Schienen

Wir betrachten eine Kugel mit Radius R und Masse m, die auf eine Bahn aus zwei Stangen läuft. Die Stangen haben einen konstanten Abstand B. Den Schwerpunkt der Kugel bezeichnen wir als $\vec{Q}$. Positionen $\vec{q}$ in der Kugel beschreiben wir mittles Kugelkoordinaten durch ihren Abstand r vom Schwerpunkt und den Winkeln (θ, ϕ). Dabei wird die Refenzrichtung so gewählt, dass der Winkel θ sich beim Rollen nicht ändert und $\delta \, R \, \phi$ den auf der Stange zurückgelegten Weg angibt. Die vektorielle Richtung entlang der Bahn bezeichnen wir als $\hat{\ell}$.

a) Die Skizzen zeigen eine Seiten- und eine Frontsicht der Kugel auf der Schiene. In jeder Skizze sind vier Stellen markiert, die beschriftet werden sollen:



Vermerken Sie auch die Gravitationbeschleunigung $\vec{g}$. Sie soll senkrecht nach unten zeigen.

b) Wie stehen B, R und δ in Beziehung zu einander?

c) Wie stehen $\dot{\vec{Q}}$, $\dot{\phi}$ und $\hat{\ell}$ in Beziehung zueinander?

d) Welche Geschwindigkeit $\dot{\vec{q}}(t)$ hat ein Massenelement an der Position $\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) + r\,\hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi(t))$? Zeigen Sie, dass man die Geschwindigkeit in folgender Form schreiben kann

$$\dot{\vec{q}}(t) = a\,\dot{\phi}\,\hat{\ell} + b\,\dot{\phi}\,\partial_\phi \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi(t))$$

Bestimmen Sie die Konstanten a und b.
Bestimmen Sie auch den Wert des Skalarproduktes $\hat{\ell} \cdot \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi(t))$.

e) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Massenelementes an der Stelle $\vec{q}(t)$. Ermitteln Sie die kinetische Energie T der Kugel durch Integration über alle Massenelemente udn schreiben Sie ihr Resultat dann in folgender Form auf

$$T = \frac{M}{2}\,R^2\,\dot{\phi}^2(t)\,\left(c + d\,\delta^2\right)$$

Welche Werte haben die Konstanten c und d?

f) Bestimmen Sie die potentielle Energie der Kugel. Die Schiene soll geradeaus in einem festen Winkel α zur Horizontalen verlaufen.

g) Stellen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$ auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$.

h) Wir interessieren uns für die Position $x(t)$ der Kugel in horizontaler Richtung entlang der Bahn. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$, ausgehen von der Gleichung für $\phi(t)$. Wie unterscheidet sie sich von der Bewegungsgleichung eines Punktteilchens, welches reibungsfrei eine schiefe Ebene hinabgleitet?

i) Zur Zeit t_0 befindet sich die Kugel an der Position x_0 und sie bewegt sich mit einer Rotationsfrequenz $\dot{\phi}(t_0) = \phi_0$ bergauf. Bestimmen Sie die Position $x(t)$ zur Zeit t.

j) Kann man die Breite der Bahn so wählen, dass die Lösungen $x(t)$ für die Kugel und für ein Punktteilchen derselben Masse übereinstimmen?
Wenn ja: Wie muss man B wählen?
Wenn nein: Wieso nicht?

11.4. Kegel auf schiefer Ebene

Wir betrachten einen Kegel mit Höhe H, Öffnungswinkel β und Masse M, der auf einer schiefen Ebene rollt, die gegenüber der Horizontalen um einen Winkel α verkippt ist. In dieser Aufgabe verwenden wir, dass die kinetische Energie geschrieben werden kann als Summe der kinetischen Energieen des Massenschwerpunktes und der Eigendrehung des Körpers, und dass die potentielle Energie im Schwerefeld durch die Lage des Schwerpunktes determiniert ist (siehe Vorlesungsskript).

a) In der Ebene wählen wir ein Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\hat{\mathbf{n}}$ für die Normalenrichtung zur Ebene, entlang $\hat{\mathbf{r}}$ geht es am steilsten runter und entlang $\hat{\mathbf{h}}$ läuft man horizontal. Machen sie eine Skizze anhand der Sie zeigen, dass $\vec{g} = (-\hat{\mathbf{n}}\,\cos\alpha + \hat{\mathbf{r}}\,\sin\alpha)\,g$ mit $g = |\vec{g}|$.

⋆ b) Der Kegel liegt entlang einer Linie in der Ebene auf. Die Spitze des Kegels legen wir in den Koordinatenursprung. Den Winkel der Linie mit $\hat{\mathbf{d}}$ nennen wir $\phi(t)$. Die Richtung der Kegelachse sei $\hat{\mathbf{z}}(t)$. Machen Sie eine Skizze und zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathbf{z}}(t) \cdot \hat{\mathbf{h}} = \cos\beta \, \sin\phi \qquad \hat{\mathbf{z}}(t) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \cos\beta \, \cos\phi \qquad \hat{\mathbf{z}}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sin\beta$$

c) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Kegels auf der Kegelachse liegt. Wir bezeichnen den Abstand des Schwerpunktes von der Kegelspitze als $\epsilon \, H$. Bestimmen Sie ϵ. Verwenden Sie dann die Resultate aus den Aufgabenteilen a) und b) um die potentielle Energie $U = -M\epsilon \, H\hat{\mathbf{z}} \cdot \vec{g}$ zu ermitteln.

d) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie der Schwerpunktbewegung (SP) gegeben ist durch

$$T_{SP} = \frac{M}{2} \, H^2 \, \dot{\phi}^2 \, c_\epsilon$$

Bestimmen Sie, wie die Konstante c_ϵ von ϵ abhängt.

e) Die Drehung des Kegels um seine Achse beschreiben wir durch den Winkel $\theta(t)$. Die kinetische Energie der Drehung um die Achse ist dann gegeben durch

$$T_{\text{spin}} = \frac{M}{2} \, H^2 \, \dot{\theta}^2 \, c_\beta$$

Bestimmen Sie die Konstante c_β. Wie hängt sie vom Öffnungswinkel β ab?

f) Abrollen ohne Schlupf impliziert eine Beziehung zwischen $\dot{\theta}$ und $\dot{\phi}$. Verwenden Sie die Bedingung, um die Lagrangefunktion aufzustellen,

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{M}{2} \, H^2 \, \dot{\phi}^2 \, c - M \, g \, H \, \big(d + e \, \cos\phi\big)$$

Wie hängen die Konstanten c, d und e von α, β und ϵ ab?

g) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung und skizzieren Sie die Lösungen im Phasenraum $(\phi, \dot{\phi})$. Unterscheiden sie dabei die Fälle $\alpha < 0$, $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$. Wodurch unterscheiden sich die Fälle und wie wirkt sich das aus?