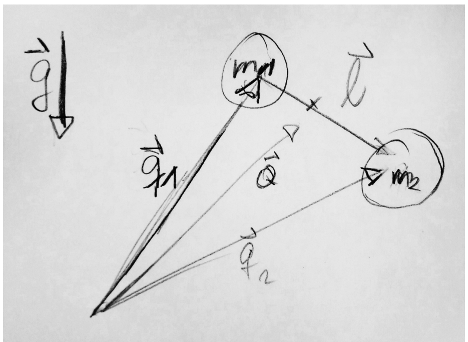
Blatt 10. Lagrange Formalismus für 2 Teilchen

Die Lösungen sollen bis Montag, den 29. Juni, als PDF-Datei hochgeladen werden. Die mit gekennzeichneten Aufgabenteile sind zum vertiefenden Üben gedacht und brauchen nicht abgegeben werden. Der mit $\star$ gekennzeichneten Aufgabenteil ist nur verpflichtend, wenn Sie den Abschluss fürs Gymnasium anstreben. Beachten Sie, dass die Aufgenteile in der Regel bearbeitet werden können, ohne dass man die vorhergehenden Teile gelöst haben muss. Ausnahmen von dieser Regel sind 1.f) und g), die auf das Resultat aus e) aufbauen. Einsteigen kann man dann wieder bei der in Teil h) gegebenen Gleichung. Weiterhin basiert 2.b) auf a), aber Teil c) soll ohne Bezugnahme auf die in b) hergeleiteten Gleichungen bearbeitet werden. Bei der in d) gegebenen Gleichung kann man einsteigen ohne die vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitet zu haben.

Aufgaben

10.1. Flugbahn einer Hantel

Wir untersuchen die Flugbahn einer Hantel im Gravitationsfeld $\vec{g}$. Die Hantel besteht aus zwei Kugeln der Radien R_i und Massen M_i mit $i \in \{1, 2\}$. Sie sind durch eine zylinderförmige Stange mit Durchmesser $r \ll R$ und Masse $m \ll M$ verbunden, so dass die Massenschwerpunkte $\vec{q}_1(t)$ und $\vec{q}_2(t)$ der Kugeln durch die Stange in einem festen Abstand ℓ gehalten werden. Im folgenden fassen wir die Kugeln als Punktteilchen auf, ignorieren die Masse der Stange und berücksichtigen die Stange nur insofern, dass sie den Abstand der Punktteilchen fixiert.



a) Der Massenschwerpunkt der Hantel sei $\vec{Q}$ und die Relativkoordinate von der einen Kugel zur anderen bezeichnen wir als $\vec{\ell} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$. Zeigen Sie, dass man die Positionen der Kugel i dann schreiben kann als $\vec{q}_i = \vec{Q} + \alpha_i \, \vec{\ell}$ und ermitteln Sie die reellen Zahlen α_i in dieser Darstellung.

b) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie und die potentielle Energie der Hantel folgende Form haben

$$T = \frac{M}{2} \dot{\vec{Q}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{\ell}}^2 ,$$
$$V = -M \vec{g} \cdot \vec{Q}$$

Wie stehen M und μ in Beziehung zu M_1 und M_2?

c) Zeigen Sie, dass die Energie $E = T + V$ und der Drehimpuls $\vec{L} = \mu \vec{\ell} \times \dot{\vec{\ell}}$ Konstanten der Bewegung der Hantel sind.

d) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung für den Massenschwerpunkt und lösen sie die Gleichung für die Anfangsbedingung $\vec{Q}(t_0) = \vec{Q}_0$ und $\dot{\vec{Q}}(t_0) = \vec{V}_0$.

e) Schreiben Sie die Relativkoordinate $\vec{\ell}$ in Kugelkoordinaten als $\vec{\ell} = \ell\,\hat{\vec{r}}(\theta(t), \phi(t))$. Wie lässt sich die kinetische Energie durch $(\vec{Q}(t), \theta(t), \phi(t))$ und ihre zeitlichen Ableitungen ausdrücken?

f) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$ auf die Erhaltungsgröße $L = \mu\,\dot{\phi}\, \sin^2\theta$ führt.

g) Ermitteln Sie das effektive Potential für die Bewegungsgleichung für θ und skizzieren Sie die Lösungen im $(\theta, \dot{\theta})$-Phasenraum.

h) Zeigen Sie, dass man die Energieerhaltung der Relativbewegung auch in folgender Form schreiben kann

$$a\,\dot{\theta}^2\, \sin^2\theta + \cos^2\theta = b \qquad \text{mit} \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$$

Wie schaut diese Gleichung aus, wenn man die Variable $x(t) = \cos\theta(t)$ einführt?

i) Welche Lösungen $x(t)$ hat die resultierende Differentialgleichung?
Wie sehen dann die Lösungen $\theta(t)$ aus?
Interpretieren Sie das Resultat anhand des Phasenraumplots aus Aufgabenteil g).

j) Für einige Anfangsbedingungen genügt die Bewegung der Hantel der Gleichung

$$\dot{\vec{\ell}}(t) = \vec{\Omega} \times \vec{\ell}(t) \tag{10.1}$$

mit einem zeitlich konstanten Vektor $\vec{\Omega}$ (d.h. $\dot{\vec{\Omega}} = 0$). Zeigen Sie, dass man die kinetische Energie dann ausdrücken kann durch $\Omega^2 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}$, $\ell^2 = \vec{\ell} \cdot \vec{\ell}$ und $\vec{\Omega} \cdot \vec{\ell}(t)$, sowie dass weiterhin die Zeitableitung jedes dieser Terme aufgrund von Gleichung (10.1) gleich Null ist.

k) Wie steht die Lösung von Gleichung (10.1) in Beziehung zu den in Aufgabenteil i) gefundenen Lösungen?

l) Was muss man beachten, wenn man die Flugbahn der echten Hantel beschreiben möchte, und nicht etwas der Approximation durch zwei Punktmassen und einer masselosen Stange?

10.2. Dosenpendel

Das Bild rechts zeigt ein Dosenpendel: ich habe dort zwei schwere Magneten mit derselben Masse M innen an einer leeren Konservendose befestigt. Wenn ich die Dose loslasse, beginnt Sie zu oszillieren. Wenn ich ihr einen Stoß gebe rollt Sie gradlinig über den Tisch. Wir beschreiben die Position der Magneten bei der Bewegung durch dem Winkel θ zwischen der Lotrechten und der kürzesten Verbindung der Symmetrieachse der Dose zum Magneten.

a) Bestimmen Sie die potentielle und kinetische Energie des Dosenpendels. Dabei sei die Masse der Dose vernachlässigbar gegen jene der Magneten. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für θ.

b) Diskutieren Sie den Fall $\alpha = \pi$. Wie bewegt sich die Dose in diesem Fall? Zeichnen Sie die Bahnen im Phasenraum.

c) Ermitteln Sie die Gleichgewichtslagen der Dose und argumentieren Sie aufgrund ihres physikalischen Sachverstand, ob sie stabil oder instabil sind. Skizzieren Sie anschließend die Bahnen im Phasenraum, für den Fall, dass $\alpha \neq 0$.

d) Für $\alpha = 0$ sollte sich folgende Bewegungsgleichung ergeben,

$$0 = 2\ddot{\theta}\,\big(1 - \cos\theta\big) + \dot{\theta}^2 \sin\theta + \omega^2\,\sin\theta$$

Wie hängt ω vom Radius der Dose, den Massen der Magnete und der Schwerkraftsbeschleunigung ab?

$\star$ e) Zeigen Sie, dass die Gleichung erheblich einfacher wird, wenn man anstatt θ die Variable $\xi = \cos(\theta/2)$ einführt, denn dann ergibt sich

$$\ddot{\xi} = \frac{\omega^2}{4}\,\xi$$

Hinweise: 1. Beachten Sie, dass $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ sowie $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.
2. Berechnen Sie $\dot{\xi}$ und ermitteln Sie die resultierende Beziehung zwischen $\dot{\theta}$ einerseits und $\dot{\xi}$ und θ andererseits.
3. Berechnen Sie $\ddot{\xi}$ und untersuchen Sie dann $2\,\sin(\theta/2)\,\ddot{\xi}$. Eliminieren Sie in diesem Ausdruck $\ddot{\theta}$ durch die Bewegungsgleichung. Im nächsten Schritt eliminieren Sie $\dot{\theta}$ durch die Beziehung aus 2.
4. Abschließend können Sie $\sin(\theta/2)$ kürzen und erhalten das angegebene Resultat.

f) Welche Anfangswerte an ξ beschreiben die Bewegung der Dose, wenn wir sie in dem Bild loslassen? Welche Anfangswerte an ξ beschreiben die Bewegung der Dose, wenn wir sie aus der Ruhelage anstoßen? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für ξ für diese Anfangsbedingungen.

g) Ermitteln Sie basierend auf dem Resultat aus (c) die Bahn von $\theta(t)$.
Was ist dabei zu beachten, wenn $\sin(\theta/2) = 0$?