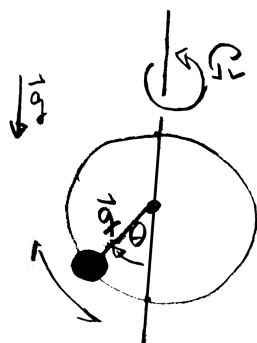


Blatt 8. Lagrange Formalismus

Die Lösungen sollen bis Montag, den 15. Juni, als PDF-Datei hochgeladen werden. Die mit \star gekennzeichneten Aufgaben brauchen nicht abgegeben werden.

Aufgaben

8.1. Phasenraum für die Bewegung einer Perle auf einem rotierendem Ring



Wir betrachten eine Perle der Masse m , die sich ohne Reibung entlang eines Ringes vom Radius ℓ bewegen kann. Der Ring rotiert mit einer Frequenz Ω um seine vertikal stehende Symmetrieachse. Die Gravitation wirkt also parallel zur Symmetrieachse. Die Position der Perle geben wir an mittels Kugelkoordinaten

$$\vec{q}(t) = \ell \hat{r}(\theta(t), \Omega t).$$

Hier ist θ die Auslenkung vom tiefsten Punkt des Ringes und Ωt die Orientierung des Ringes in der horizontalen Ebene.

- a) Bestimmen Sie die Komponenten von $\hat{r}(\theta, \phi)$ in kartesischen Koordinaten. Rechnen Sie dann nach, dass \hat{r} , $\hat{\theta}$ und $\hat{\phi}$ mit

$$\hat{\theta} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad \hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$$

eine orthogonale Basis bilden. Wie steht $\hat{\phi}$ in Beziehung zu $\partial \hat{r} / \partial \phi$?

- b) Ermitteln Sie $\dot{\vec{q}}(t) = \ell \dot{\hat{r}}(\theta(t), \Omega t)$.
- c) Bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V der Perle.
- d) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung der Perle, d.h. für $\theta(t)$, mittels des Lagrange-Formalismus. Wie steht sie in Beziehung zu der Bewegung des Fliehkraftreglers aus Aufgabe 7.1?
- e) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Bewegungsgleichung und Diskutieren sie ihre Stabilität in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz Ω .
- f) Skizzieren Sie die Bewegung im Phasenraum für $\Omega^2 \ell / g < 1$ und $\Omega^2 \ell / g > 1$.

8.2. Zwei Massen am Flaschenzug

Wir legen ein Gummiband über die Rolle eines Flaschenzuges und befestigen Gewichte derselben Masse m an den beiden Endes des Bandes. Die Gewichte können sich vertikal bewegen und wir bezeichnen ihre Höhen als h_1 und h_2 . Wenn sie sich mit gleicher Geschwindigkeit antiparallel bewegen, bleibt die Länge des Bandes unverändert. Bewegen Sie sich im Mittel nach unten, wird das Band gestreckt und die Spannung nimmt zu. Wir vernachlässigen Reibung und die Masse des Bandes.

a) Skizzieren Sie das Problem und vermerken Sie dabei die im Modell verwendeten Parameter und Koordinaten.

b) Zeigen sie, dass die Lagrange-Funktion für diese Problem folgende Form hat,

$$\mathcal{L}(h_1, h_2, \dot{h}_1, \dot{h}_2) = \frac{m}{2} \dot{h}_1^2 - m g h_1 + \frac{m}{2} \dot{h}_2^2 - m g h_2 - \frac{k}{2} (h_1 + h_2)^2$$

Hier ist k das Elastizitätsmodul des Gummibandes und der Ursprung für die Höhenangaben wurde so gewählt, dass das Band nicht gespannt ist, wenn $h_1 + h_2 = 0$.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen von h_1 und h_2 mittels des Lagrange-Formalismus.

d) Die Bewegungsgleichungen lassen sich einfacher lösen, wenn man anstatt h_1 und h_2 die Koordinaten $H = h_1 + h_2$ und $D = h_1 - h_2$ verwendet. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion dann folgende Form hat:

$$\mathcal{L}(H, D, \dot{H}, \dot{D}) = \frac{\mu}{2} (\dot{H}^2 + \dot{D}^2) - m g H - \frac{k}{2} H^2$$

Hier ist μ eine effektive Masse. Wie steht sie in Beziehung zur Masse m der Teilchen?

e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für H und D .

f) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und interpretieren sie das Resultat.

Für welche Kombinationen von H und D macht das Modell sinnvolle Vorhersagen?

Wann sollte man es nicht (mehr) verwenden?

8.3. Das Küchenpendel

Aus zwei Strohhalmen (Längen L_1 und L_2), zwei Korken (Massen m_1 und m_2), einer Büroklammer und etwas Verpackungsmaterial bastelt man einfach das hier abgebildete Pendel. Ich habe es an einem Schaschlikspieß aufgehängt. Die beiden schwarzen Strohhalmarme stehen jeweils in einem rechten Winkel zum Spieß und die beiden Arme stehen in einem festen Winkel α zueinander. Dder Spieß dient als Achse für ihre Bewegung: wenn man einen der beiden Korken ein wenig anschubst, schaukeln Arme und Korken als starres System um diese Achse; also in einer Ebene senkrecht zum Spieß. Die Auslenkung des rechten Armes bezüglich der Horizontalen nennen wir $\theta(t)$.



a) Bestimmen Sie die kinetische Energie und die potentielle Energie des Pendels. Begründen Sie, dass diese beiden Größen nur von $\theta(t)$ und $\dot{\theta}(t)$ abhängen. Stellen Sie von daher die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ auf.

- b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Pendels.
- c) Was ist die Ruhelage? Welche Bewegung findet man für kleine Auslenkungen? Zeichnen Sie das Phasenportrait.
- d) Die Bewegungsgleichung wird erheblich übersichtlicher, wenn man den Schwerpunkt der beiden Korken als Referenzpunkt wählt. Zeigen Sie, dass sich der Schwerpunkt direkt unterhalb des Spießes befindet, wenn das Pendel in Ruhe ist.
- ★ Es sei ℓ der Abstand des Schwerpunktes von der Pendelachse und φ die Auslenkung des Schwerpunktes aus der Senkrechten. Stellen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ auf und bestimmen sie wiederum die Bewegungsgleichungen. Sehen Sie, wie die Gleichungen für $\ddot{\theta}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$ miteinander in Beziehung stehen?