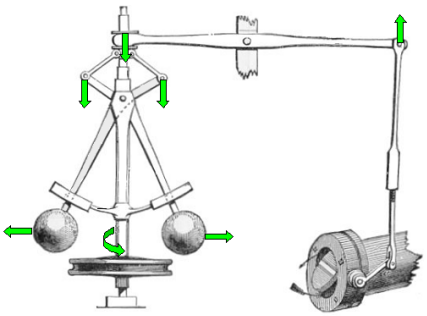
Blatt 7. Punktteilchen und Planeten

Die Lösungen sollen bis Montag, den 8. Juni, als PDF-Datei hochgeladen werden. Die mit ⋆ gekennzeichneten Aufgaben brauchen nicht abgegeben werden.

Aufgaben

7.1. Fehlersuche: Fliehkraftregler



Wikimedia Commons

Ein Fliehkraftregler wird in Dampfmaschinen verwendet, um beim Überschreiten einer vorgegebenen Drehfrequenz Ω_c die Drosselklappe in der Dampfleitung der Maschine zu öffnen. Für kleinere Frequenzen hängen die Kugeln nach unten und die Klappe ist geschlossen. Beim Überschreiten von Ω_c werden die Kugeln von der Fliehkraft nach außen gedrückt und es wird Dampf abgelassen.

Aufgrund der Symmetrie haben die beiden Kugeln dieselbe kinetische und potentielle Energie. Wir betrachten daher nur eine Kugel und beschreiben ihre Position durch die vertikalen Position z, den Abstand von der Rotationsachse r und den Winkels ϕ, der die Position der Kugel in der horizontalen Ebene beschreibt (Zylinderkoordinaten). Die Länge des Armes, an dem die Kugel aufgehängt ist, sei L, die Masse der Kugel sei M, und den Winkel zwischen dem Arm und der Senkrechten nennen wir θ. Der Fliehkraftregler rotiert mit der Frequenz Ω.

a) Skizzieren Sie das Problem mit Benennung der physikalischen Größen und Koordinaten. Geben Sie auch die Einheitsvektoren des othonormalen Basissystems zu den Koordinaten (z, r, ϕ) an. Bezüglich dieser Basis soll die Position der Kugel folgende Form annehmen:

$$\vec{q}(t) = -L\,\cos\theta(t)\,\hat{z} + L\,\sin\theta(t)\,\hat{r}(\phi(t)) \qquad \text{mit} \quad \phi(t) = \Omega t\,.$$

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie $E_{\rm kin}$ der Kugel und ihre potentielle Energie $E_{\rm pot}$ im Gravitationsfeld.

c) Untersuchen Sie ob die Summe aus kinetischer und potentieller Energie für diese Bewegung erhalten ist. Bestimmen Sie dazu die Zeitableitung von $E_{\rm kin} + E_{\rm pot}$ und zeigen Sie dass die Ableitung verschwindet, wenn entweder $\dot\theta = 0$ oder

$$\ddot\theta(t) = -\omega^2 \sin\theta(t)\,\left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos\theta(t)\right] \qquad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}\,.$$

d) Der Fliehkraftregler hat immer ein wenig Reibung $-\gamma\dot\theta$. Analysieren Sie daher die Bewegungsgleichung

$$\ddot\theta(t) = -\omega^2 \sin\theta(t)\,\left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos\theta(t)\right] - \gamma\dot\theta$$

Was passiert bei langsamer Rotation $\Omega^2 \ll \omega^2$? Was verändert sich für $\Omega^2 \gtrsim \omega^2$? Ist dieses Resultat *physikalisch* plausibel? Wenn nicht: Wieso nicht? Woran könnte das liegen?

7.2. Bewegung im harmonischen Zentralkraftfeld

Wir untersuchen die Position $\vec{r}(t)$ eines Teilchens der Masse m in einem Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = k\,\vec{r}\,, \qquad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

a) Wir möchten eine sehr einfach Teilchenfalle[1] bauen, die das Teilchen in der Nähe des Koordinatenursprungs festhält. Welche Bedingung müssen wir dazu an k stellen?

b) Bestimmen Sie die Energie des Teilchens und zeigen Sie, dass die Energie erhalten ist.

c) Zeigen Sie, dass auch der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times m\,\dot{\vec{r}}$ des Teilchens erhalten ist. Gilt das auch für den Drehimpuls bei einer anderen Wahl des Koordinatenursprungs?
Hinweis: Das Zentrum des Potentials liegt dann nicht mehr im Koordinatenursprung.

d) Der erhaltene Drehimpuls zeichnet eine Ebene im Raum aus. Die Position des Teilchens in dieser Ebene sei (x_1, x_2). Zeigen Sie, dass $m\ddot{x}_i(t) + k\,x_i(t) = 0$ ist für $i \in \{1, 2\}$. Zeichnen Sie die Trajektorien im Phasenraum $(x_i, \dot{x}_i)$. Was bestimmt die Form der Bahnen im Phasenraum?

e) Zeigen Sie, dass die Bahnen im Konfigurationsraum (x_1, x_2) Elipsen sind. Was bestimmt die Form der Bahnen im Konfigurationsraum?

f) Diskutieren Sie die Beziehung zwischen der Amplitude und der Form der Trajektorien, festgelegt durch den Quotienten und das geometrische Mittel der Halbachsen der Bahn im Konfigurationsraum, und der Periode der Bahn.

7.3. Die Bewegung von zwei Teilchen mit harmonischer Wechselwirkung

Wir betrachten die Bewegung von zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 an den Positionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$. Sie wechselwirken mitander mittels einer harmonischen Kraft, dergestalt dass

$$m_1\,\ddot{\vec{q}}_1(t) = -k\,\big(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\big)\,.$$

a) Ermitteln Sie $m_2\,\ddot{\vec{q}}_2(t)$ basierend auf dem dritten Newtonschen Gesetz.

b) Diskutieren Sie die Bewegung des Massenschwerpunkt dieses Zweiteilchensystems.
Wie bewegt er sich im Laufe der Zeit?
Wie hängt diese Bewegung ab von der Anfangsbedingung $\big(\vec{q}_1(t_0), \vec{q}_2(t_0), \dot{\vec{q}}_1(t_0), \dot{\vec{q}}_2(t_0)\big)$?

c) Diskutieren Sie die Relativbewegung der beiden Teilchen $\vec{R}(t) = \vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)$. Stellen Sie dazu die Bewegungsgleichung für $\vec{R}(t)$ auf, und ermitteln Sie die Lösung basierend auf den Resultaten aus Aufgabe 7.2.

d) Wie unterscheidet sich die Bewegung von zwei Teilchen mit harmonischer Wechselwirkung von dem Fall, in dem die Gravitationskraft wirkt?

[1] Teilchenfallen mit sehr viel ausgeklüngelteren Kraftfeldern werden verwendet, um Teilchen einzufangen und bei sehr niedrigen Temperaturen zu untersuchen: Paul- und Penning-Fallen für hochpräzise Massenspektroskopie und magneto-optische Fallen für Bose-Einstein Kondensate.

7.4. Konjunktionen

Ab und zu überkreuzen sich die Bahnen von zwei (oder gar drei) Planeten oder eines Planeten und des Mondes am Nachthimmel. So zeigt das Bild rechts das Ausrichten von Merkur und Venus über dem Mond am 8. März 2008. Im letzten Frühling standen Mars, Jupiter und Saturn sehr dicht beieinander und am 20. Dezember wird es eine Konjugation von Jupiter und Saturn geben (die große Konjugation). Ab und an gibt es eine dreifache Konjunktion, bei der man kurz hintereinader drei Konjunktionen von zwei Planeten beobachten, und dann dauert es sehr lange bis ein solches Ereignis wieder eintritt. Dreifache Konjunktion von Jupiter und Saturn gab es zuletzt in den Jahren 7 und 6 v. Chr. 1682/83, 1821 (nur in Deklination), 1940/41 und 1981. Die nächste wir im Jahr 2238/39 eintreten.

6 March 2008 [ESO/Y. Beletsky [CC BY 4.0]

Die Planete laufen aus annähernd kreisförmigen Elipsenbahnen. Wie kommt es dann zu solch komplexen zeitlichen Abfolgen der Konjunktionen?

a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Position eines Planeten am Nachtimmel zu Mitternacht.

b) Zeichnen Sie die Position als Funktion der Zeit. Ist die Bewegung monoton? Wenn nein: Wie kann das sein, wo die Planete doch mit beinahe konstanter Geschwindigkeit annähernd im Kreis laufen?

c) Welche Einsichten gibt das Resultat aus b) für die Interpretation der Abfolge von Konjunktionen und dreifacher Konjunktionen?

⋆) Als auswärtiger Besucher des Planetensystems läuft 'Oumuamua auf einer Hyperbelbahn. Untersuchen Sie, wie dann die in Aufgaben 4.4 gezeigte, vielfach geschwungene Bahn zustande kommt.

Hinweis: Die Postion eines Himmelskörpers relativ zur Erde kann man als Differenz der Vektoren Sonne-Himmelskörper und Sonne-Erde schreiben.