# Blatt 6. Wiederholung und Vertiefung

Die Lösungen sollen bis Dienstag, den 2. Juni, als PDF-Datei hochgeladen werden. Die mit $\star$ gekennzeichneten Aufgaben brauchen nicht abgegeben werden.

## Aufgaben

### 6.1. Höhenlinien und Gradienten

a) Bestimmen Sie die Äquipotentiallinien und den Gradienten von

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2$$

Skizzieren Sie dann die Äquipotentiallinien, d.h. Linien gleicher Höhe, des Potentials und markieren Sie die Gradienten durch Pfeile.

b) Ermitteln Sie, welche Form die Funktion

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

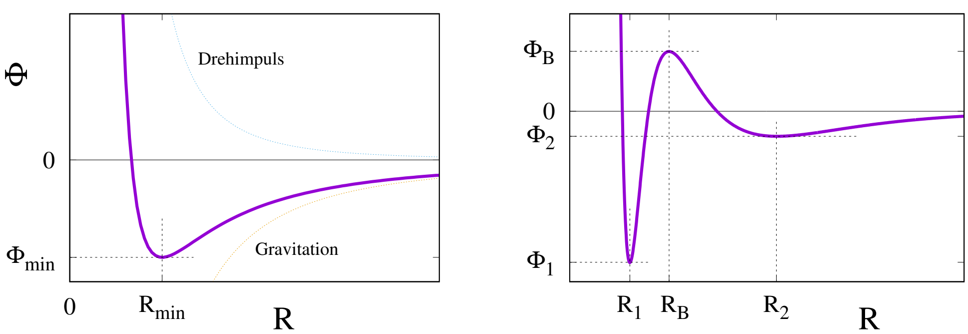
annimmt, wenn man Sie in Polarkoordinaten $x = R\cos\theta$ and $y = R\sin\theta$ schreibt. Was besagt das Resultat über den Verlauf der Höhenlinien?

Ermitteln Sie nun den Gradienten der Funktion, unter Verwendung der Formel
$\nabla f_2 = \partial_R f_2 \, \hat{R} + R^{-1} \partial_\theta f_2 \, \hat{\theta}$.

Skizzieren Sie dann die Äquipotentiallinien des Potentials und markieren Sie die Gradienten durch Pfeile.

### 6.2. Phasenraumportraits für das Kepler und das DLVO Problem.

Die Abbildung unten zeigen das effektiven Potential für den Abstand der Planeten im Keplerproblem und das DLVO Potential für die Wechselwirkung von geladenen Kolloiden.[1] Skizzieren Sie jeweils die Lösungen der Bewegungsgleichung im Phasenraum $(R, \dot{R})$.




[1] Die DLVO Theorie sagt vorher, dass es für Kolloide zwei Bindungszustände gibt. Eine starke Bindung der Stärke $\Phi_1$, bei der die Kolloide einen kleinen Bindungsabstand $R_1$ haben und eine schwächere Bindung der Stärke $\Phi_2$ bei einem größerem Abstand $R_2$. Dazwischen gibt es eine Energiebarriere der Höhe $\Phi_B$.

### 6.3. Mechanische Ähnlichkeit

Zwei Lösungen einer Differentialgleichung nennt man *mechanisch ähnlich*, wenn man sie durch Reskalierung der Zeit-, Längen- und Masse-Skala ineinander überführen kann. Wir kennzeichnen die reskalierten Variablen mit einem Apostroph und verwenden die Skalenfaktoren $\tau$, $\lambda$ und $\mu$ für Zeit, Ort und Masse:

$$t' = \tau t\,, \qquad \vec{q}_i' = \lambda \vec{q}_i\,, \qquad m_i' = \mu m_i$$

a) Betrachten Sie ein System mit der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, \dot{\vec{q}}_i^2$ und einer potentiellen Energie mit folgendem Verhalten unter Reskalierung,

$$V' = \mu^\alpha \, \lambda^\beta \, V$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen invariant sind, wenn man die Zeit mit folgendem Faktor reskaliert

$$\tau = \mu^{(1-\alpha)/2} \, \lambda^{(2-\beta)/2}$$

b) Betrachten Sie nun zwei mathematische Pendel, $i \in \{1, 2\}$, bei denen jeweils eine Masse $m_i$ an einem Arm der Länge $L_i$ an einem Gelenk befestigt ist und frei schwingt (also eine Schaukel, bei der die Masse der Seile vernachlässigt wird).
Wie lässt sich das Verhältnis ihrer Perioden ausdrücken als Produkt von Potenzen der Verhältnisse der Armlängen und der Massen?
Welches Resultat hätten Sie aufgrund einer Dimensionsanalyse erwartet?

c) Welche Skalierung finden Sie für das Verhältnis der Perioden eines Federpendels?
Vergleichen Sie wiederum mit dem Resultat einer Dimensionsanalyse!

d) Das Kepler-Problem beschreibt die Bewegung von zwei Körpern im Sonnensystem, unter Vernachlässigung des Einflusses der anderen Körper. Für (angenäherte) Kreisbahnen ist die Periode eindeutig durch die Energie

$$E = \frac{m_1}{2} \, \dot{\vec{q}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2} \, \dot{\vec{q}}_2^{\,2} - \frac{m_1 \, m_2 \, G}{|\vec{q}_2 - \vec{q}_1|}$$

bestimmt.
Wie stehen dann die Perioden des Orbits der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde in Beziehung zueinander?
Welche Information über die Periode erhält man aus der Ähnlichkeitsanalyse, die man nicht mittels Dimensionsanalyse finden kann?

## 6.4. Gedämpfter harmonischer Oszillator

Im Phasenraum wird die Bahn eines schwach gedämpften harmonischen Oszillators durch eine Spirale beschrieben.

a) Zeichnen Sie die Funktion $z(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma\,t-\mathrm{i}\,\omega\,t}$ in der komplexen Ebene, $z(t) \in \mathbb{C}$.

b) Der gedämpfte harmonische Oszillator wird beschrieben durch die homogene, linear Differentialgleichung

$$0 = \ddot{h}(t) + \tilde{\gamma}\,\dot{h}(t) + \tilde{\omega}^2\,h(t)$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung Lösungen der Form

$$h(t) = \Re\left[C\,\exp\bigl(-\gamma\,t - \mathrm{i}\,\omega\,t)\bigr)\right]$$

hat, wobei $C \in \mathbb{C}$ eine geeignet gewählte Konstante ist und $\Re$ den Realteil bezeichnet.
Wie hängen $\gamma$ und $\omega$ von $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\omega}$ ab?
Wie muss man $C$ wählen, damit die Lösung zu Beginn eine Auslenkung $A$ und Geschwindigkeit Null hat?

c) Zeigen Sie, dass $(1 + \mathrm{i}\gamma)\,h(t) + \mathrm{i}\,\dot{h}(t) = K\;\exp\bigl(-a\,t - \mathrm{i}\,b\,t\bigr)$, mit positiven reellen Konstanten $a$ und $b$.
Bestimmen Sie $a$ und $b$.
Welche Transformation der Koordinaten im Phasenraum überführt $h{+}\mathrm{i}\dot{h}$ in $(1{+}\mathrm{i}\gamma)\,h(t){+}\mathrm{i}\,\dot{h}(t)$?
Welche Form hat dementsprechend die Trajektorie eines gedämpften harmonischen Oszillators im Phasenraum?

⋆) Aufgrund des exponentiellen Ausklingens der Schwingung benötigt der Oszillator im strikt mathematischen Sinne unendlich lange bis er in Ruhe ist. Physikalisch ist die Schwingung allerspätestens zu einer Zeit $t_c$ nicht mehr relevant, wenn die kinetische Energie $m\,\omega^2\,A^2\;\exp(-2\gamma\,t_c)$ des Oszillators genau so groß ist wie die thermische Energie $k_B T$. Welche obere Grenze bedingt dies für die Schwingungen eines Federpendel der Masse $m = 20\,\mathrm{g}$, Frequenz $f = 1\,\mathrm{Hz}$, und Dämpfung $\gamma = \omega/10$ – bei Raumtemperatur und einer Auslenkung zu Beginn von 2 cm.
Spielt die anfängliche Auslenkung überhaupt eine Rolle?

⋆) Wie lang ist nun aber die Spirale im Phasenraum?
Hat die Linie eine endliche Länge $L$, oder ist sie unendlich lang?
Zeigen Sie, dass

$$L = \int_{t_0}^{\infty} \mathrm{d}t \left|\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right| \qquad \text{mit} \quad z(t) = h(t) + \mathrm{i}\,\dot{h}(t)$$

und berechnen Sie davon ausgehend $L$.