Blatt 5. Differentialgleichungen und Bewegungsgleichungen

Das Blatt soll bis Montag, den 25. Mai, als PDF-Datei hochgeladen werden.

Aufgaben

5.1. Lösen von Differentialgleichungen mittels Variablenseparation

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$ so dass $y(\pi/4) = 0$

b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3\,x^2\,y}{2y^2+1}$ so dass $y(0) = 1$

c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1+y^3}{x\,y^2\,(1+x^2)}$ so dass $y(1) = 2$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\dfrac{1}{x\,(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$

5.2. Aufsteigen eins Luftbläschens in einer Flüssigkeit

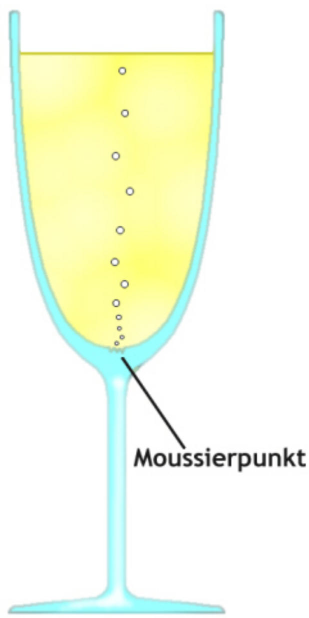
Sekt erhält seine Spritzigkeit durch das Aufsteigen von Bläschen, die an der Oberfläche zerplatzen und dabei Duft und Geschmacksstoffe freisetzen. Ein Gasbläschen des Radius R erfährt aufgrund des Archimedischen Gesetzes eine aufwärts gerichtete Auftriebskraft

$$F_g = \frac{4\,\pi}{3}\,R^3\,(\varrho_f - \varrho_g)\,g$$

wobei ϱ_g und ϱ_f die Massendichten des Gases und der umgebenden Flüssigkeit sind. Wenn das Bläschen mit der Geschwindigkeit $\dot{z}(t)$ aufsteigt, steht der Auftriebskraft die Stokessche Reibungskraft

$$F_S = -6\,\pi\,\eta\,R\,\dot{z}(t)$$

entgegen.



Rob/wikimedia CC BY-SA 2.0 DE

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Höhe $z(t)$ des Bläschens in dem Glas auf. Zeigen Sie, dass es sich um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten handelt. Schreiben Sie die Gleichung dazu in folgender Form,

$$I = \ddot{z}(t) + c_1\,\dot{z}(t) + c_0\,z(t)\,.$$

Welche Werte haben die Konstanten I, c_1 und c_0?

b) Ermitteln Sie die Längen- und Zeitskala und eine konstante Referenzgeschwindigkeit dergestalt, dass die dimensionslose Position ξ der Kugel und ihre dimensionslose Geschwindigkeit $\zeta = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau$ folgender homogenen(!) Differentialgleichung genügen

$$0 = \ddot{\xi}(\tau) + \dot{\xi}(\tau) \tag{5.1}$$

Hinweis: Die Wahl einer konstanten Referenzgeschwindigkeit bedeutet hier, dass man ein Bezugssystem wählt, das sich mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bewegt, so dass das Bläschen sich in diesem System schlussendlich nicht mehr bewegt.

c) Skizzieren Sie das Richtungsfeld und einige Lösungen im Phasenraum für Gleichung (5.1).

d) Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Gleichung (5.1).

e) Bestimmen Sie die Lösung für die dimensionslose Position $\xi(\tau)$.

f) Ermitteln Sie $z(t)$ durch Substituieren der Definitionen für die dimensionslosen Einheiten.

g) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der im Skript angegebenen Gleichung (4.3.3b).
Wie stehen die Lösungen in Beziehung zueinander?

5.3. Lichtintensität bei Beugung am Einzelspalt

Monochromatisches Licht der Wellenlänge λ, welches durch einen Spalt auf einen Schirm fällt, erzeugt ein Beugungsmuster der Form (siehe Abbildung)

$$I(x) = I_{\max} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

Dabei beschreibt $I(x)$ die Lichtintensität (d.h. Leistung pro Fläche) des Lichtes, und x den seitlichen Versatz auf dem Schirm bezüglich eines geradeaus hinter dem Spalt auf dem Schirm liegenden Punktes.

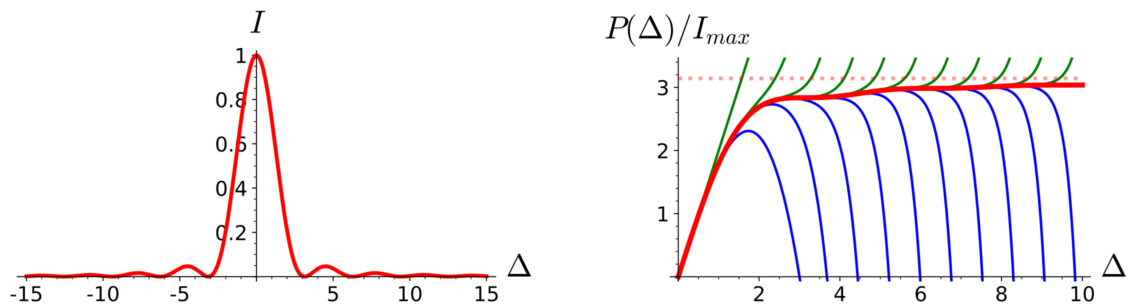


Abbildung 1: Die Graphik links zeigt $I(x)/I_{\max}$, und die dicke rote Linie in der rechten Graphik die auf einen Streifen der Breite Δ einfallende (normierte) Strahlungsleistung $P(\Delta) = \left[\int_{-\Delta}^{\Delta} I(x)\mathrm{d}x\right] / I_{\max}$. Die rote gepunktete Linie markiert den asymptotischen Wert π. Die anderen Linien zeigen Approximationen, die man erhält, wenn man die in 5.3b) berechneten Taylor-Reihe für $P(\Delta)$ nur bis $n = N$ auswertet: grün für gerade Ordnungen $N = 0, 2, \ldots 20$, und blau für ungerade Ordnungen $N = 1, 3, \ldots 19$.

Wir diskutieren nun ist die Gesamtleistung $P(\Delta)$ des Lichtes, welches auf eine Fläche der Breite Δ um die Symmetrieachse auf den Schirm auftrifft.

a) Wir verwenden die Taylor-Entwicklung von $I(x)$ um $P(\Delta)$ zu bestimmen! Zeigen Sie zunächst, dass $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$, und verifizieren Sie anschließend ausgehend von der Taylor-Reihen-Darstellung des Cosinus, dass

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1-\cos 2x}{2x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} (2x)^{2n}$$

b) Bestimmen Sie nun $P(\Delta)$ durch Integration dieses Ausdrucks.

Bonus. Schreiben Sie in Programm, welches $P(\Delta)$ numerisch berechnet und mit den Taylor-Approximationen verschiedener Ordnung vergleicht; so wie in der Abbildung oben gezeigt.