Blatt 4. Newtonsche Gesetze, Erhaltungsgrößen, Gradienten

Das Blatt soll bis Montag, den 11. Mai, als PDF-Datei hochgeladen werden.

Aufgaben

4.1. Höhenlinien und Gradienten

a) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen

$$A(\mathbf{q}) = A_0\ \sin(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) \qquad\qquad B(\mathbf{q}) = B_0\ \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})$$

wobei $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ ein konstanter Vektor ist und $\mathbf{q} = (x, y)$ eine Position in $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie auch die Linien $y(x)$ entlang derer die Funktionswerte jeweils konstant sind. Auf einer Karte wären dies die Höhenlinien; in der Physik entspricht dies Äquipotentiallinien.

c) Zeigen Sie, dass der Gradient senkrecht zu den Höhenlinien steht.

d) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktionen und markieren Sie die Gradienten durch Pfeile.

4.2. Kräfte, Potentiale und Linienintegrale

Ein Vektorfeld $\mathbf{K}(x, y, z)$ heißt *konservativ*, wenn das Resultat des Linienintegrals von $\mathbf{q}_I$ zu $\mathbf{q}_F$ nicht abhängt von der Wahl des Weges $\mathbf{q}(t)$, $t_I \le t \le t_F$ mit $\mathbf{q}(t_I) = \mathbf{q}_I$ und $(t_F) = \mathbf{q}_F$. Wir untersuchen dies hier für die drei Vektorfelder

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1(x,y,z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\
\mathbf{K}_2(x,y,z) &= \left(x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ 0\right)\\
\mathbf{K}_3(x,y,z) &= (x+y+z,\ x+y+z,\ x+y+z)
\end{aligned}$$

und die Wege

$$\begin{aligned}
a:&\quad \mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t) = \big(t/2, t,\ 0\big)\,,\\
b:&\quad \mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t) = (t,\ 2t,\ 0)\,,\\
c:&\quad \mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t) = (t^3,\ 2t^2,\ 0)\,.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{K}_1 = \nabla|\mathbf{q}|$.
Was bedeutet dies für die Werte den Linienintegrale $W(\mathbf{q}) = -\int \mathrm{d}\mathbf{s}\cdot\mathbf{K}_1(\mathbf{q})$?

b) Fassen Sie auch das Vektorfeld $\mathbf{K}_2$ als Kraft auf ein Teilchen auf, und berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um ein Teilchen vom Koordinatenursprung zur Position $\mathbf{q}(t)$ zu bringen.
Wie unterscheiden sich die Rechnungen für die Wege a und b? Welche Schlussfolgerung ziehen Sie für die Arbeit $W(\mathbf{q})$ entlang dieser Wege?
Zur Zeit $t = 1$ erreichen die beiden Teilchen b und c die Position $(1, 2, 0)$. Vergleichen Sie die Arbeit, die in den drei Fällen für den Weg verrichtet wurde. Ist $\mathbf{K}_2$ eine konservative Kraft?

c) Führen Sie die Diskussion der Wegintegrale nun auch für $\mathbf{K}_3$ durch.

4.3. Torsionsspannung von Schüren

Wenn man ein Gewicht der Masse m an eine Schnur hängt und um einen Winkel θ verdreht, so erfährt die Drehung ein zurückstellendes Drehmoment M, welches zunächst in guter Näherung proportional ist zum Auslenkungswinkel, $M = \gamma\,\theta$. Wenn man dann weiterdreht, beginnt das Seil sich irgendwann zu verdrillen, wie in der Abbildung links gezeigt. Bei weiterem Drehen ändert sich das Drehmoment auf dem Seil dann nicht mehr. Vielmehr wird das verdrillte Stück Schnur länger und das Gewicht bewegt sich nach oben. Wir vernachlässigen Reibung und untersuchen, welche Gestalt das Potential Φ hat, welches die Rückstellkraft des Seiles beschreibt.

a) Zunächst betrachten wir kleine Auslenkwinkel $\theta < \theta_c$, bei denen das Seil noch nicht verdrillt ist. Berechnen Sie nun die Arbeit, die Sie verrichten, wenn Sie das äußere Ende des Zollstocks um einen Winkel θ drehen. Die Position des Endes befindet sich an der Stelle $\mathbf{q} = (R\cos\theta, R\sin\theta, h)$ mit $R = 10\,\mathrm{cm}$. Das Drehmoment ist dann $\mathbf{M} = \mathbf{q}\times\mathbf{F}$, wobei $\mathbf{F}$ immer horizontal sein soll und senkrecht zu dem Zollstock angreift. Zeigen Sie zunächst, dass die Kraft $\mathbf{F}$ in dieser Situation wie folgt mit dem Drehmoment $\mathbf{M}$ in Beziehung steht

$$\mathbf{F} = \frac{1}{R^2}\,\mathbf{M}\times\mathbf{q}\,,$$

und zeigen Sie, dass daher

$$\Phi(\theta) = c\,\theta^2$$

Wie hängt die Proportionalitätskonstante c dabei von γ ab?

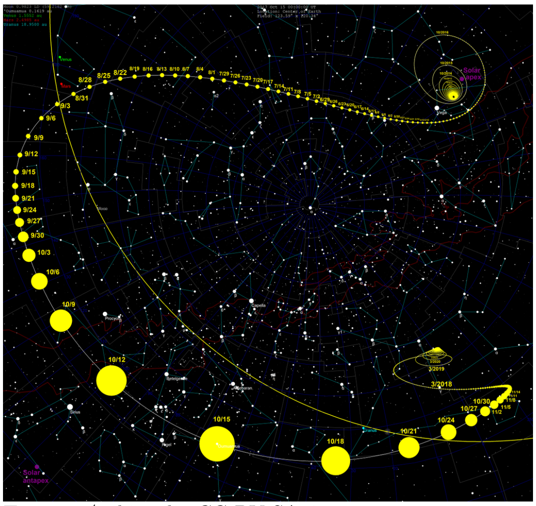
b) Für $|\theta| > \theta_c$ gilt, dass $\Delta\Phi = m\,g\,\ell\,\Delta\theta$, wobei $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$ und ℓ eine Konstante mit der Einheit Meter ist. Um welche Höhe hebt sich das Gewicht, wenn man den Zollstock um 2π weiterdreht?

c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{2}\theta^2 & \text{für} \quad |\theta| < \theta_c\,, \\[2ex] \gamma\,\theta_c\left(|\theta| - \dfrac{\theta_c}{2}\right) & \text{für} \quad |\theta| \geq \theta_c\,. \end{cases}$$

Wie hängt θ_c von γ, Δ, m und g ab?

4.4. 'Oumuamua



Tomruen/wikimedia CC BY-SA 4.0

Am 19. Oktober 2017 hat man am Haleakala Observatory in Hawaii 'Oumuamua entdeckt, den ersten Himmelskörper in unserem Sonnensystem, der aus dem interstellaren Raum stammt. Er hat sich unserem Sonnensystem mit einer Geschwindigkeit von

$$v_I = 26\,\mathrm{km/s}$$

genähert und erreichte an seinem Perihel, d.h. bei der dichtesten Annäherung an die Sonne am 9. September 2017, eine Geschwindigkeit von

$$v_P = 87.71\,\mathrm{km/s}\,.$$

Die Bahn aus Erdperspektive sehen Sie links.

a) Zeigen Sie, dass 'Oumuamuas Geschwidigkeiten wie folgt in Beziehung stehen mit dem Abstand zur Sonne am Perihel,

$$\frac{v_P^2 - v_I^2}{2} = \frac{M_S\,G}{D}\,. \tag{4.1}$$

Dabei ist M_S die Masse der Sonne und G die Gravitationskonstante.

b) Zeigen Sie, dass für die Bahn der Erde um die Sonne gilt, dass

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} \simeq \frac{M_S\,G}{R^2} \tag{4.2}$$

wobei R der Abstand der Erde zur Sonne und $T = 1\,$Jahr die Periode der Erdbahn um die Sonne ist.

c) Zeigen Sie, dass die die Gleichungen (4.1) und (4.2) zur Folge haben, dass

$$\frac{D}{R} = \frac{2\,v_E^2}{v_P^2 - v_I^2}\,, \tag{4.3}$$

wobei $v_E = 2\pi R/T$ die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne ist.

d) Verwenden Sie (4.3) um die dichteste Annäherung von 'Oumuamua an die Sonne in Astronomischen Einheiten zu bestimmen.

e) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem von der NASA angegebenen Wert $D = 0.25534(7)$AU. Was könnte der Gund sein für die Abweichung?