Blatt 3. Vektoren, Kreuzprodukte, Drehmomente

Das Blatt soll bis zum Montag Vormittag, den 4. Mai als PDF-Datei in ihr Postfach hochgeladen werden. Die mit $\star$, und gekennzeichneten Aufgaben sind zum weiteren Üben gedacht und werden nicht abgegeben. Aufgabenteile, die mit Sek2 gekennzeichnet sind, müssen von den anderen Studiengängen nicht bearbeitet werden.

Aufgaben

3.1. Eigenschaften des Kreuzproduktes

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Kreuzproduktes:

a) Wenn zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig sind, d.h. wenn sich der eine als skalares Vielfaches des anderen schreiben lässt, so verschwindet ihr Kreuzprodukt,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \,.$$

b) Wenn drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig sind, d.h. wenn sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schreiben lässt, so verschwindet ihr Spatprodukt

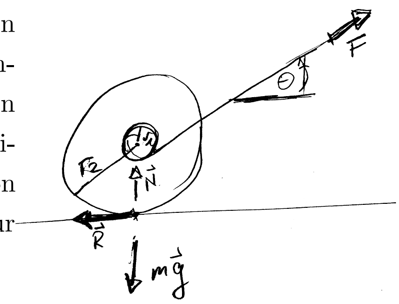
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \,.$$

Was ändert sich an Ihrem Argument, wenn $\vec{a}$ eine Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist?

c) Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

3.2. Jo-Jos spazieren führen

Die Skizze rechts zeigt ein Jo-Jo, dass auf dem Boden steht und an einem Faden gehalten wird, der einen Winkel θ zur horizontalen beschreibt. Auf das Jo-Jo wirken die Gewichtskraft $m\vec{g}$, die Normalkraft $\vec{N}$ und die Reibungskraft $\vec{R}$ am Auflagepunkt, sowie die Kraft $\vec{F}$ von der Schnur. Der Radius der Achse, auf der die Schnur aufgewickelt ist, sei r_1. Der Radius des Jo-Jo sei r_2.

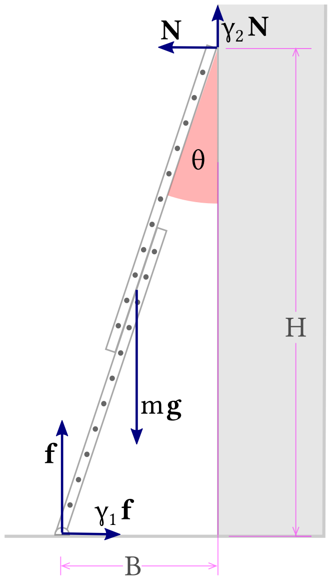


a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit keine Kraft auf den Schwerpunkt des Jo-Jos wirkt?

b) Für welchen Winkel θ verschwindet auch das Gesamtdrehmoment?

Machen Sie ein Experiment: Was passiert für größere Winkel θ? Was für kleinere? Was passiert, wenn Sie den Faden auf konstanter Höhe halten, und das Jo-Jo spazieren führen?
[**10 Bonus Punkte**, wenn Sie ihr Experiment mit einem kurzen Video dokumentieren!]

3.3. Kraft und Drehmoment für eine Leiter



Die Skizze links zeigt eine Leiter, die an einer Wand lehnt. Sie ist angestellt mit einem Winkel θ zur Vertikalen und es wirken folgende Kräfte:

1. Die Schwerkraft $m\vec{g}$.
2. Die Normalkraft $\vec{f}$, mit der die Leiter auf dem Boden steht.
3. Die Reibungskraft $\gamma_1 \vec{f}$ am Boden, die das Wegrutschen verhindert.
4. Eine Kraft $\vec{N}$ der Wand auf die Leiter am Kontaktpunkt.
5. Die Reibungskraft $\gamma_2 \vec{N}$ an der Wand, die das Wegrutschen verhindert.

Die Länge der Leiter sei $L = \sqrt{B^2 + H^2}$.

a) Welche Bedingungen müssen die Kräfte erfüllen, damit sich der Schwerpunkt der Leiter nicht bewegt? Wie stehen $N = |\vec{N}|$ und $f = |\vec{f}|$ dann in Beziehung zueinander, und welche Beziehung besteht zwischen $mg = m|\vec{g}|$ und f?

b) Zeigen Sie, dass die Bedingung dafür, dass sich die Leiter nicht dreht, geschrieben werden kann als

$$\tan\theta_{1/2} = \frac{2\,\gamma_1}{1 - \gamma_1\,\gamma_2} \qquad \text{oder} \qquad \tan\theta_1 = \gamma_1\,,$$

wobei $\theta_{1/2}$ den Fall beschreibt, in dem die Kraft $m\vec{g}$ in der Mitte zischen den beiden Auflagepunkten der Leiter angreift (so wie oben skizziert) und θ_1 den Fall, in dem jemand ganz oben auf der Leiter steht, so dass die Graviationskraft als eine Kraft $M\,\vec{g}$ (nach oben) abgeschätzt wird, die am Kontakt der Leiter mit der Wand angreift.

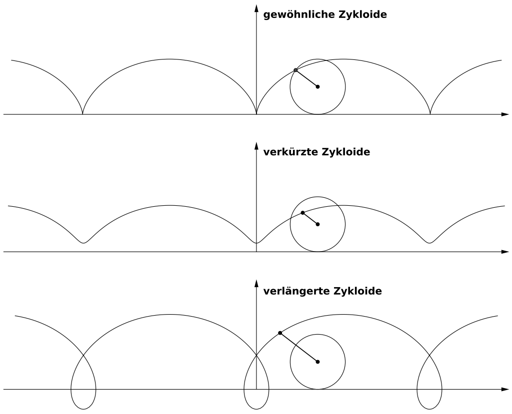
Rechnen Sie nach, dass es dabei keine Rolle spielt, ob man das Drehmoment bezüglich des Schwerpunktes, oder dem Punkt, an denen die Leiter auf der Erde steht oder der Stelle, an der sie die Wand berührt betrachtet!

Sek2) Beweisen Sie, dass die Bedingung für ein Verschwinden den Drehmomentes unabhängig vom Bezugspunkt der Drehung ist, wenn die Summe der an die Leiter angreifenden Kräte verschwindet.

c) Die Leiter fängt an zu rutschen, wenn der Betrag der Reibungskrafte $\gamma_1\vec{f}$ und $\gamma_2\vec{N}$ Grenzwerte $\mu_1\vec{f}$ und $\mu_2\vec{N}$ überschreitet. Dabei ist μ_1 der Haftreibungskoeffizient der Leiterfüße auf dem Boden. Nehmen Sie an, dass $\mu_1 = 0.5$ ist und μ_2 noch kleiner ist. Wie sollten Sie dann das Verhältnis B/H wählen, damit Sie sicher auf der Leiter nach oben steigen können?

⋆ Warum rutscht die Leiter erst, wenn man oben steht? Was kann man dagegen unternehmen? Stimmt das überhaupt?

3.4. Zykloiden.



Kmhkmh, Wikimedia CC BY 4.0

Ich bin letztes Wochenende Rad gefahren. Ein Steinchen im Profil meines Reifens hat dabei Zykloidenbahnen gedreht und meine Reflektoren liefen auf verkürzten Zykloiden. Schauen Sie sich die Animationen hier auf Wikipedia und auf dieser Seite an.

Zykloiden bezeichnet die Bahn eines Punktes auf der Oberfläche einer Scheibe, die auf einer Leitkurve, z.B. einer Geraden abrollt. Verkürzte Zykloiden entstehen, wenn man den Punkt nicht auf die Außenkante der Scheibe setzt, sondern weiter innen — verlängerte Zykloiden, wenn man entsprechend einen Punkte weiter außen verfolgt. Die Bahnkurve einer Zykloiden beschreibt man am einfachsten in zwei Schritten: Es sei $\vec{M}(\theta)$ die Position des Mittelpunktes der Scheibe und $\vec{D}(\theta)$ der Vektor vom Mittelpunkt zu dem Punkt $\vec{P}(\theta)$ den wir verfolgen. Dann ist

$$\vec{P}(\theta) = \vec{M}(\theta) + \vec{D}(\theta) \,.$$

a) Wir betrachten ein Rad mit Radius r, welches auf einer geraden Straße abrollt und interessieren uns für die Bahn eines Reflektors, der in einem Abstand d von der Radnabe befestigt ist. Als Koordinatenursprung wählen wir den Kontaktpunkt des Rades mit der Straße. Der Winkel θ gibt an, um welchen Winkel das Rad sich gedreht hat. Beachten Sie, dass negative Winkel einer Vorwärtsbewegung des Rades entsprechen! Skizzieren Sie den Aufbau und zeigen Sie, dass

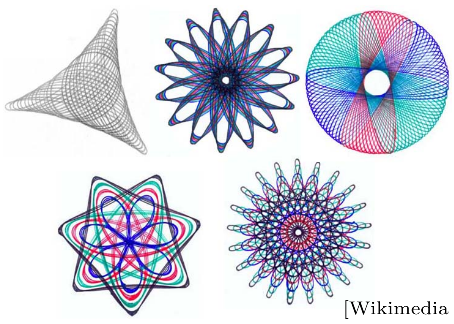
$$\vec{M}(\theta) = \begin{pmatrix} -r\theta \\ r \end{pmatrix} , \qquad \vec{D}(\theta) = \begin{pmatrix} -d\,\sin(\varphi+\theta) \\ d\,\cos(\varphi+\theta) \end{pmatrix} .$$

Welche Bewandtnis hat φ hier?

⋆ Installieren Sie Sage und starten Sie das Jupiter-Worksheet zu dieser Aufgabe, um die Bahnen interaktiv zu untersuchen.

3.5. Hypozykloiden und Epizykloiden.

Rollt die Scheibe außen auf einem Kreis ab, entstehen Epizykloiden; und wenn sie innen abrollt, nennt man die Bahnkurven Hypozykloiden. Diese Kurven werden mit einem Spirographen gezeichnet, einem wundervollen Spielzeug, um die Bedeutung von kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) und größten gemeinsamen Teilern (ggT) zu veranschaulichen.


[Wikimedia Public domain]

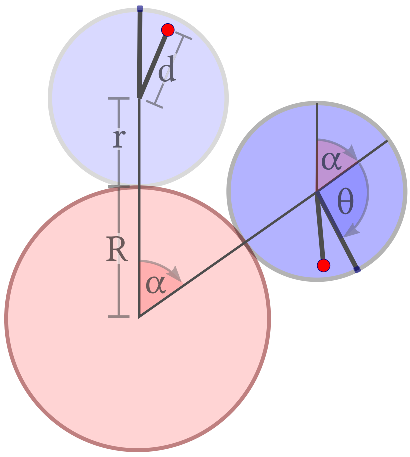
Beim Spirographen wird die Bewegung der Scheibe mittels eines Zahnradmechanismus an der Leitkurve entlanggeführt. Die Leitkurve ist in diesem Falle ein Kreis.

a) Wir betrachten die Bahn einer Scheibe mit n Zähnen entlang einer Leitlinie mit m Zähnen. Wieso muss die resultierenden Kurve eine geschlossene Bahn sein? Wie oft muss man den Kreis umfahren, bis sich die Kurve schließt? Eine wievielfache Symmetrie hat die resultierende Kurve? (Die beiden linken Kurven in der Abbildung sind Beispiele für dreifache und siebenfache Symmetrie.)

b) Modifizieren Sie das Sage-Skript aus 3.4, so dass es Hypozykloiden und Epizykloiden zeichnet. Wählen Sie dann die vierte und fünfte Ziffer ihrer Matrikelnummer für die Werte n und m (bzw die fünfte und sechste Ziffer, wenn ansonsten $n = m$ wäre). Speichern Sie einen Plot der resultierenden Kurven und diskutieren Sie ihre Symmetrie. Geben Sie den Plot mit den Erläuterungen als Hausaufgabe ab.

Hinweise

Die Abbildung rechts zeigt die Ausgansstellung zum Zeichnen einer Epizykloiden bei der die rote Scheibe festgehalten wird und die blau Scheibe außen darauf abrollt. Die Epizykloiden ergibt sich dann als Bahnkurve des roten Punktes. Der Punkt, der auf der Scheibe zu Beginn ganz oben steht (also auf 12 Uhr) ist durch ein blaues Quadrat markiert. Wir betrachten die Situation, in der sich der Mittelpunkt $\vec{M}$ der blauen Scheibe um den Windel α bewegt hat. Bestimmen Sie $\vec{M}$.



Beim Abrollen wurde auf der roten Scheibe ein Weg $\ell = \alpha\, R$ zurückgelegt. Wie muss man den Wert $\theta(\alpha)$ dann wählen, damit der Weg entlang der blauen Schweibe genauso lang ist. (Stellen Sie sich vor die rote Scheibe ist rundherum nass und die blaue Scheibe ist zu Beginn trocken: Wie lang ist das Stück auf der blauen Scheibe, dass nass ist, wenn die blaue Scheibe an der Position α ist?) Bestimmen Sie die neue Position der Markierung außen auf der blauen Scheibe.

Die Position des roten Punktes erhält man, wenn man zu $\theta(\alpha)$ einen Anfangswinkel φ addiert, der beschreibt, wie weit die Position des roten Punktes zu Beginn von der vertikalen Richtung abweict und wenn man im Abstand d vom Mittelpunkt der blauen Scheibe schaut. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{D}$ vom Mittelpunkt der blauen Scheibe zum roten Punkt.

Wie schaut nun der Vektor $\vec{P} = \vec{M} + \vec{D}$ für die Epizykloiden aus?