Blatt 2. Gruppen, Vektoren, Kräfte

Das Blatt soll bis Samstag, den 25. April bearbeitet werden und dann als PDF-Datei in ihr Postfach hochgeladen werden. Die mit $\star$, und gekennzeichneten Aufgaben sind zum weiteren Üben gedacht und werden nicht abgegeben. Aufgabenteile, die mit Sek2 gekennzeichnet sind, müssen von den anderen Studiengängen nicht bearbeitet werden.

Aufgaben

2.1. Eulers Formel und Additionstheoreme Trigonometrischer Funktionen

Eulers Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ etabliert eine Beziehung zwischen der komplexwertigen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

a) Skizzieren Sie die Lage von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ in der komplexen Ebene und zeigen Sie auf, wie Eulers Formel mit dem Satz von Pythagoras in Beziehung steht.

b) Die komplexe Argumente gelten für die Exponentialfunktion dieselben Rechenregeln wie für reele Argumente; insbesondere gilt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

Vergleichen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Ausdrücke. Was impliziert dies für die Additionstheoreme Trigonometrischer Funktionen: Wie lassen sich $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ mittels $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$ und $\cos y$ ausdrücken?

c) Vereinfachen Sie Additionstheoreme für die Spezialfälle $\sin(2x)$ und $\cos(2x)$.

d) Bestimmen Sie auch die Additionstheoreme für $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Suchen Sie die Regeln für das Pascalsche Dreieck, wenn Sie den allgemeinen Ausdruck für $(a+b)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ nicht kennen.

2.2. Eine Gruppe mit algebraischer und geometrischer Interpretation

Wir untersuchen die Menge $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ mit der Verknüpfung Multiplizieren und anschließendes Bilden der Quersumme bis man eine einstellige Zahl erhält. Zum Beispiel ist $3 \circ 5 = 6$, da das Produkt $3 \cdot 5 = 15$ ist, mit Quersumme von 6. Für größere Zahlen muss man die Quersumme gegebenenfalls mehrfach berechnen. So ist $7 \circ 8 = 2$, da das Produkt $7 \cdot 8 = 56$, mit Quersume 11 und beim nächsten Mal ergibt sich die 2.
Wir zeigen nun, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist und diskutieren die Beziehung zur Diedergruppe D_3.

a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung kommutativ ist.

b) Füllen Sie die Verknüpfungstabelle aus. Inwiefern hilft Ihnen die Information dabei, dass die Verknüpfung kommutativ ist?

$\circ$	1	2	4	5	7	8
1						
2						
4						
5						
7						
8						

$\star$) Verifizieren Sie auch durch eine explizite Rechnung, dass die Menge M abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung $\circ$.

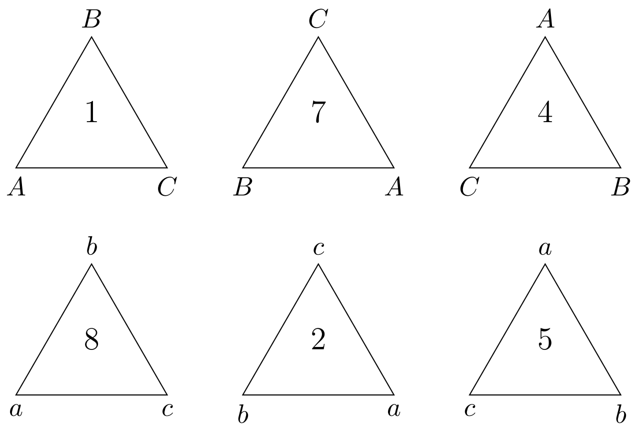
Anmerkung: Dies folgt auch aus der Verknüpfungstabelle! Wie?

Hinweis: Beachten Sie an die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9.

c) Was ist das neutrale Element der Verknüpfung?

d) Was sind die inversen Elemente für die anderen Elemente von M?

e) Wir ordnen die Elemente nun wie folgt graphisch an:



Zeigen Sie, dass das Element 7 der **D**rehung dieser Dreiecke um 120° entspricht. Wir nennen es im Folgenden D.

Zeigen Sie weiterhin, dass das Element 8 ein **W**echseln der Beschriftung der Ecken von Groß- zu Kleinbuchstaben und zurück bewirkt. Wir nennen es im Folgenden W.

f) Wie kann man die Elemente der Gruppe durch D und W ausdrücken?

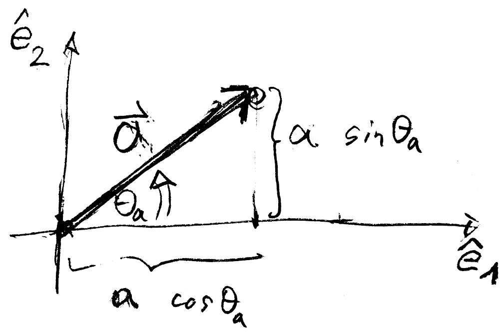
Sek2) Verwenden Sie die Kommutativität der Verknüpfung und die Darstellung der Gruppenelemente aus Aufgabenteil f), um die Assoziativität zu beweisen.

2.3. Geometrische und algebraische Form des Skalarproduktes

Die Skizze rechts zeigt den Vektor $\vec{a}$ in der Ebene und seine Darstellung als Linearkombination von zwei orthonormalen Vektoren $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$,

$$\vec{a} = a\,\cos\theta_a\,\hat{e}_1 + a\,\sin\theta_a\,\hat{e}_2$$

Dabei ist a die Länge des Vektors $\vec{a}$,
und $\theta_1 = \angle(\hat{e}_1, \vec{a})$.



a) Zusätzlich zu $\vec{a}$ betrachten wir einen weiteren Vektor $\vec{b}$ mit der Darstellung

$$\vec{b} = b\,\cos\theta_b\,\hat{e}_1 + b\,\sin\theta_b\,\hat{e}_2$$

Verwenden Sie die Rechenregeln für Vektoren, um zu zeigen, dass

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\,\cos(\theta_a - \theta_b)$$

Hinweis: Beachten sie das Resultat aus 2.1.

b) Man kann auch Koordinaten verwenden, um das Skalarprodukt zu berechnen. Wir schreiben

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit $a_1 = a\,\cos\theta_a$ und $a_2 = a\,\sin\theta_a$, sowie $b_1 = b\,\cos\theta_b$ und $a_2 = b\,\sin\theta_b$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ für diese beiden Vektoren und vergleichen Sie das Resultat.

2.4. Tauziehen

Drei Muskelprotze probieren mit Stricken einen zehn Zentner schweren Stein aus einem Acker zu ziehen. Sie können jeweis mit eine Kraft von Maximal 2 kN ausüben und ihre Stricke müssen dazu in einen Winkel von mindestens 30° auseinanderlaufen.

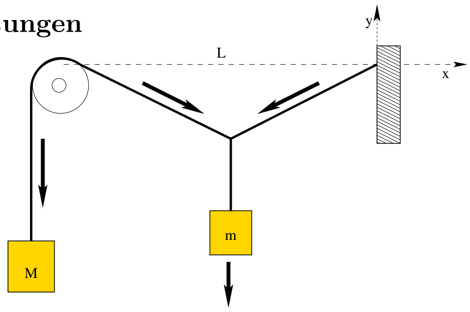
a) Skizzieren Sie die an den Stein angreifenden Kräfte und deren Summe.

b) Wie groß ist die an den Stein angreifende Kraft F_M?

c) Der Stein stellt der angreifenden Kraft eine Haftreibung $\mu M g$ entgegen, wobei $g = 9.81$ m/s^2 die Fallbeschleunigung im Gravitationfeld ist. Wie groß darf die Haftreibung höchstens sein, damit die Männer den Stein bewegen können?

2.5. Aufhängung von Laternen und Oberleitungen

Eine Laterne der Masse m wird an der rechten Straßenseite mittels eines Ankers in einer Wand und an der linken Seite mit einer Umlenkrolle und einem Gewicht der Masse M befestigt (siehe Skizze). Diese Art der Befestigung findet man auch oft bei Oberleitungen von Bahnen und Straßenbahnen.



a) Beschriften Sie: Die Gewichtskraft des Gewichtes M sei $\vec{F}_M$; die Gewichtskraft der Lampe $\vec{F}_m$; die Kraft entlang des Seiles zur Linken der Lampe $\vec{F}_1$ und die zu ihrer Rechten $\vec{F}_2$.

b) Die Aufhängung der Umlenkrolle übt eine Kraft $\vec{F}_R$ auf die Rolle aus, so dass sie sich nicht bewegt. Wie hängt diese Kraft mit den in Aufgabenteil (a) eingeführten Kräften zusammen? Ermitteln Sie die Kraft graphisch und tragen Sie sie in die Skizze ein.

c) Es sei $m = 15$ kg und $M = 80$ kg. Berechnen Sie den Winkel α zwischen der horizontalen und dem Aufhängeseil, wenn die Lampe genau in der Mitte zwischen Wand und der Rolle hängt. Bestimmen Sie $|\vec{F}_R|$.

d) Der Winkel α ist eine Funktion des Massenverhältnisses m/M. Wieso könnte man dies erwarten? Ermitteln Sie die Funktion $\alpha(m, M)$ und zeichnen Sie die Funktion von mn/M. Was geschieht für $m > 2M$?

Hinweis: Der Aufbau lässt sich zu Hause leicht mit etwas Faden und zwei Gewichten nachstellen. Probieren Sie es aus! Für Photos und Messungen von $\alpha(m, M)$ vergeben wir Bonuspunkte.

$\star$) Wie groß darf man die Masse M höchstens wählen, wenn der Anker in der Wand eine maximale Zuglast von $14,0$ kN halten kann? Wie groß ist dann der Winkel α?

$\star$) Warum sollte man nie ein Seil horizontal zwischen zwei Ankern verspannen, und dann eine Lampe daranhängen? Was ist der Vorteil der für die Laternen verwendeten Aufhängung, wenn es zum Beispiel einen heftigen Eisregen gibt und das Gewicht der Laterne aufgrund des daran hängenden Eises stark zunimmt?