Blatt 1. Grundlagen und Dimensionen

Wegen der Osterfeiertage soll das Blatt bis zum Mittwoch, den 15. April bearbeitet werden und dann als PDF-Datei in ein Postfach hochgeladen werden, dass wir für Sie einrichten werden und zu dem Sie die Zugangsdaten per E-Mail erhalten werden. Die mit $\star$, und gekennzeichneten Aufgaben sind zum weiteren Üben gedacht und sollenn nicht abgegeben werden. Dabei bezeichnet Aufgaben, deren Lösung in der Regel einiges Nachdenken erfordert.

Aufgaben

1.1. Taylorentwicklung elementarer Funktionen

Siegfried Großmann gibt in seinem Buch die ersten Glieder der Taylorentwicklung einiger elementarer Funktionen. Verifizieren Sie die gegebenen Ausdrücke, in dem Sie die Ableitungen der Funktionen bestimmen,

a) $(1+x)^n \approx 1 + n\,x$

$\star$) $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{x}{2}$

c) $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2}$

b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$

$\star$) $\tan x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$

Leiten Sie für folgende Funktionen jeweils auch das nächste Glied der Entwicklung her. Für das erste Beispiel ist die Lösung angegeben.

d) $\dfrac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$

f) $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \underline{\qquad}$

e) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \underline{\qquad}$

g) $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \underline{\qquad}$

1.2. Volumen und Oberflächen von Rotationskörpern

Einen Rotationskörper erhält man, indem man einen Funktion $f(x)$ um die x-Achse rotiert. Macht man dies für die Funktion $\sqrt{R^2 - x^2}$ mit $-R \le x \le R$ so erhält man eine Kugel vom Radius R. Das Volumen V und die Oberfläche O eines Rotationskörpers ist gegeben durch die Integrale

$$V = \pi \int \mathrm{d}x \; \big(f(x)\big)^2 \qquad O = 2\,\pi \int \mathrm{d}x \; f(x)\, \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ und vergewissern Sie sich, dass der Rotationskörper tatsächlich eine Kugel ist.

b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche der Kugel durch Berechnen der angegebenen Integrale.

1.3. Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke

a) Füllen Sie die Tabelle aus, indem Sie zunächst die Winkel in rad als Vielfache von π eintragen. Benutzen Sie sodann die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen, um die offenen Funktionswerte für die Sinus- und Cosinusfunktione zu ermitteln. Für einen Eintrag ist dies vorgeführt.

θ		$\sin\theta$	$\cos\theta$
$\circ$	rad		
0	--------	0	$\sin(\pi/2) = 1$
30	--------	$\frac{1}{2}$	--------
45	--------	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	--------
60	--------	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	--------
90	$\pi/2$	1	--------
120	--------	--------	--------
135	--------	--------	--------
150	--------	--------	--------
180	--------	--------	--------

b) Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck, für welches einer der beiden anderen Winkel θ benannt werde. Wie stehen die Quotienten aus den Längen der Katheten und der Hypethenuse in Beziehung zu $\sin\theta$ und $\cos\theta$?

c) Welche Beziehung der trigonometrischen Funktionen folgt aus dem Satz von Pythagoras? Benutzen Sie diese Beziehung und die Symmetrieen der trigonometrischen Funktionen, um den Funktionswert für $\theta = \pi/4$ zu ermitteln.

Benutzen Sie nun weiterhin die trigonometrische Relation $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta$, um auch die angegebenen Werte für $\theta = \pi/6$ und $\theta = \pi/3$ zu berechnen.

Bestimmen Sie auch die Werte für $\pi/10$, $\pi/8$, und $\pi/5$.

1.4. Wasserwellen

Die Geschwindigkeit einer Welle in tiefem Wasser, d.h. bei Wassertiefen deutlich größer als die Wellenlänge, hängt nur von der Wellenlänge L und der Schwerebeschleunigung $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$ ab.

a) Wie hängt die Wellengeschwindigkeit von L und g ab?

b) Die Höchstgeschwindigkeit einer Yacht ist gegeben durch die Rumpfgeschwindigkeit. Dies ist die Geschwindigkeit einer Welle mit derselben Länge wie der Schiffsrumpf. Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit einer $30\,\mathrm{ft}$ Yacht.
Hinweis: $1\,\mathrm{ft} = 304.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

$\star$) Oft wird der Faktor $7/23$ verwendet, um Fuß in Meter umzurechnen, d.h. man nimmt an, dass $7\,\mathrm{m} = 23\,\mathrm{ft}$. Wie gut ist diese Approximation?

1.5. Orbit der Erde um die Sonne

a) Licht legt den Weg von der Sonne zur Erde in 8 Minuten und 19 Sekunden zurück. Welchen Abstand D hat die Sonne zur Erde?
Hinweis: Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$.

b) Die Periode der Erdbahn um die Sonne hängt ab vom Abstand D der Erde zur Sonne, der Masse der Sonne $M = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ und der Gravitationskonstange $G = 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$. Schätzen Sie, basierend auf diesen Informationen ab wie lange die Erde für ihre Bahn um die Sonne benötigt. Geben Sie das Resultat an in SI-Einheiten.

c) Geben Sie das Resultat aus (b) auch in Jahren an. Sie erhalten ein Resultat in der Größenordnung von einem Jahr, welches aber durchaus um einen erheblichen Faktor von Eins abweicht. Erkennen Sie den Zahlenwert des Faktors?

Bonus-Aufgabe

1.6. Kann man diesen Trichter lackieren?

Wir betrachten den Rotationskörper, der sich ergibt für $f(x) = x^{-1}$ mit $x \geq 1$.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$. Sie finden einen unendlich langen Trichter, oder ein “Horn”.

b) Zeigen Sie, dass der Trichter das Volumen π hat.

c) Bestimmen Sie die Oberfläche des Trichters zunächst für $x \in \{1, L\}$ für einen Wert $L \gg 1$. Was bedeutet dies die Oberfläche des Trichters, wenn man $L \to \infty$ betrachtet.

d) Da die Oberfläche des Trichters unendlich groß ist, würde man erwarten, dass man sie nicht mit endlich viel Farbe lackieren kann. Andererseits ist das Volumen endlich, so dass man ihn mit endlich viel Farbe komplett ausfüllen kann. Ist die Oberfläche dann nicht auch angestrichen? Wie kann das sein?