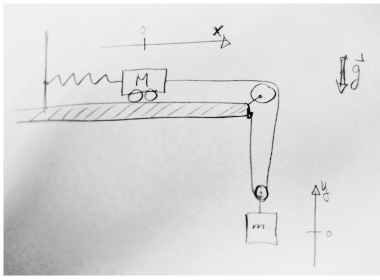
Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 9. 7. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 14. Zusatzaufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur

1. Wagen an Feder und Flaschenzug



Wir betrachten einen Wagen der Masse M, der auf einem horizontalen Brett rollt. Links ist es mit einer Feder der Federkonstante k an der Wand befestigt. Rechts an einer Schnur, die zu einem Flaschenzug führt, an dem ein Gewicht der Masse m hängt. Die Position des Wagens auf dem Brett bezeichnen wir als x, wobei die Ruhelage im Ursprung $x = 0$ sein soll. Die Position des Gewichtes bezeichnen wir als y, wobei die Ruhelage im Ursprung $y = 0$ sein soll.

(a) Der Wagen und das Gewicht sind jeweils bewegungslos in ihrer jeweiligen Ruhelage. Um welchen Betrag ist die Feder ausgelenkt?

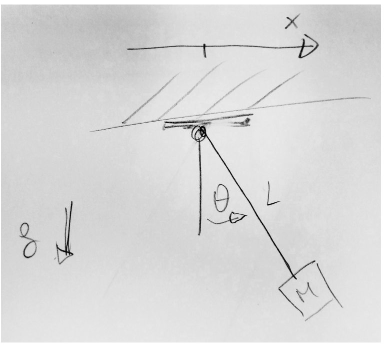
(b) Betrachten Sie nun Auslenkungen aus der Ruhelage. Welche Beziehung besteht zwischen x und y?

(c) Ermitteln Sie die kinetische Energie und die potentielle Energie des Systems. Die Ausdrücke sollen nur mittles x und $\dot{x}$ ausgedrückt werden.

(d) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichung des Wagens.

(e) Zu Beginn befinden sich der Wagen und das Gewicht in ihrer jeweiligen Ruhelage. Zur Zeit t_0 wird dem Wagen ein Stoß gegeben, so dass er sich mit der Geschwindigkeit v_0 in Bewegung setzt. Ermitteln Sie die Position des Wagens zur Zeit $t > t_0$.

2. Ein Pendel an einer Schiene.



Betrachten Sie ein mathematisches Pendel, bei dem ein Gewicht der Masse M an einem Arm der Länge L schwingt. Die Auslenkung des Pendels sei θ. Nun ist der Aufhängepunkt x aber nicht fest, sondern horizontal in der Pendelebene kann er sich frei auf einer Schiene bewegen. Die Position des Gewichtes bezeichnen wir als $\vec{q} = (q_1, q_2)$ mit

$$q_1 = x + L\ \sin\theta$$
$$q_2 = -L\ \cos\theta$$

(a) Bestimmen Sie die kinetische Energie und die potentielle Energie dieses Pendels als Funktion der Variablen θ, $\dot{\theta}$, x und $\dot{x}$.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für x. Benutzen Sie diese Gleichung, um zu beweisen, dass

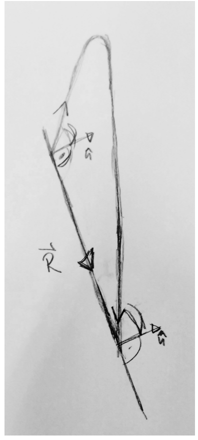
$$V = \dot{q}_1$$

erhalten ist.

(c) Betrachten Sie die kinetische Energie noch einmal als Funktion von $\vec{q}$ und $\dot{\vec{q}}$. Welche Lagrangefunktion finden Sie dann? Ermitteln Sie $q_2(t)$.

*(d) (Vorsicht schwierig!!)
Verwenden Sie die Definition $q_2 = -L\ \cos\theta$ und das Erhaltungsgesetz $\dot{q}_1 = \vec{V}$ =konst um aus der bekannten Lösung für $q_2(t)$ auch die Bewegung für $q_1(t)$ zu ermitteln. Welche Bahn $q_2(q_1)$ beschreibt das Pendel für $V = 0$?

3. Eine Symmetrie beim schiefen Wurf.



Betrachten Sie einen schiefen Wurf eines Balles

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2}\, t^2$$

vom Abwurfpunkt $\vec{q}_0$ und Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v}_0$. Der Ball landet an der Position $\vec{R}$ relativ zum Abwurfpunkt. Dabei muss $\vec{R}$ nicht unbedingt horizontal sein.

(a) Zeigen Sie, dass die Dauer t_e des Fluges wie folgt berechnet werden kann

$$t_e = -2\, \frac{\vec{v}_0 \cdot \hat{n}}{\vec{g} \cdot \hat{n}} \,.$$

Dabei ist $\hat{n}$ eine Einheitsvektor, der normal auf $\vec{R}$ steht.

(b) Zeigen Sie, dass die Bahn beim Abwurf und bei der Landung denselben Winkel mit $\vec{R}$ einschließt.

*(c) Für das Schlagballwerfen gilt die Regel, dass man maximale Weiten erreicht, wenn man den Ball mit einem Winkel von $\pi/2$ zur Horizontalen abwirft. Kugelstoßwer wählen in der Regel einen flacheren Winkel. Wieso?

*(d) (Vorsicht schwierig!!)
Ermitteln Sie den optimalen Abwurfwinkel, wenn sich das Ziel auf einer deutlich anderen Höhe befindet als der Abwurfpunkt.

Weitere Hinweise.

Prüfungsrelevant sind weiterhin

- die Zerlegung der Bewegung von 2 Teilchen in die des Schwerpunktes und der Relativbewegung
- Skizzieren der Bewegung im Phasenraum