Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

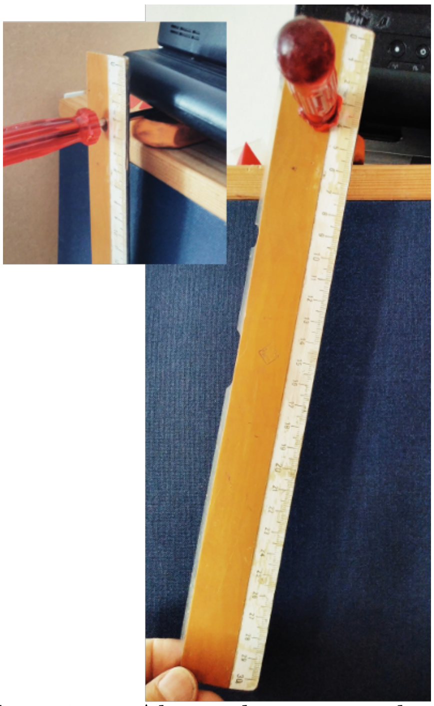
Sommersemester 2019
Do, 27. 6. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 13. Starrer Körper und Konsolidierung von Kompetenzen

Die erste Aufgabe weist den Weg vom mathematischen Pendel zum Pendeln eines starren Körpers. In der zweiten Aufgabe schauen wir, wie man mit diesen Vorkenntnissen eine drängende Alltagsfrage aufklären kann. Die dritte Aufgabe dient der Wiederholung und Konsolidierung des Unterrichtsstoffes. Als Anhang gebe ich eine Aufgabe zum Rechnen mit Kreuzprodukten, die *nicht* abgegeben werden soll.

1. **Ein pendelndes Lineal.**



Ein Lineal ist ein Quader, dessen Kantenlängen wir hier bezeichnen als Länge L, Breite B und Dicke D. Entlang der Länge ist eine Skala zum Messen von Abständen angebracht. Typische Breiten sind einige Zentimeter. Die Dicke beträgt wenige Millimeter, so dass man die Skala gut ablesen kann. Mittig in der Breite und Nahe am Rand bezüglich der Länge ist eine Bohrung, an dem man das Lineal aufhängen kann. Wenn man es auslenkt, pendelt es. Das Bild links zeigt einen Messaufbau, den ich mit meinem alten Lineal aufgebaut habe. Wir untersuchen in dieser Aufgabe die Frequenz er Schwingung und wie sie von der Position der Bohrung abhängt.

Die Masse des Lineals sei M und die Bohrung hat einen Abstand a vom rechten Rand. Um zu verstehen, wie das Lineal pendelt, denken wir es uns aufgebaut aus vielen kleinen Scheibchen der Länge $\mathrm{d}x$ und Querschnitt $B \times D$, die jeweils eine Masse $\rho B D \,\mathrm{d}x$ haben. Die Massendichte ρ ist konstant. Wir beschreiben die Bewegung in Polarkoordinaten mit Ursprung an der Bohrung. Der Winkel θ misst die Auslenkung aus der Ruhelage und $-a < R < L - a$ ist der Abstand eines Scheibchens von der Bohrung.

(a) In der Vorlesung haben wir eingeführt, dass

$$M = \int_0^L \mathrm{d}x \int_0^B \mathrm{d}y \int_0^D \mathrm{d}z \; \varrho(x,y,z) \,.$$

In welcher Beziehung stehen $\varrho(x,y,z)$ und ρ für das Lineal, sowie ρ und M?

*(b) Für $a/L = 0$, $a = L/2$ und $a = L$ hat die potentielle Energie des Lineals die Werte

$$V = \begin{cases} -\frac{1}{2} MgL \cos\theta & \text{für} \quad a/L = 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad a/L = 1/2\,, \\ \frac{1}{2} MgL \cos\theta & \text{für} \quad a/L = 1\,. \end{cases}$$

Wie kann man das unmittelbar, ohne Rechnung sehen?

(c) Zunächst nehmen wir nun an, dass B und D so klein sind, dass man sich die kinetische Energie eines Scheibchens in guter Näherung gegeben wird durch

$$\frac{1}{2} \times (\text{Masse des Scheibchens}) \times R^2\, \dot{\theta}^2\,.$$

Zeigen Sie, dass das Lineal daher folgende kinetische Energie hat

$$T = \frac{1}{6}\, M\, L^2\, \dot{\theta}^2 \left[1 - 3\frac{a}{L} + 3\left(\frac{a}{L}\right)^2 \right] .$$

(d) Verwenden Sie den Lagrange-Formalismus, um die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ zu ermitteln. Sie sollten wiederum die Gleichung

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$$

finden. Allerdings hängt ω nun auch von a/L ab. Bestimmen Sie die Abhängigkeit!

*(e) Diskutieren Sie die Parameterabhängigkeit von $\omega(a/L)$. Für $a = 0$ unterscheidet sie sich um einen Faktor $\sqrt{3}$ von einem mathematischen Pendels mit derselben potentiellen Energie. Woran liegt das?
Die Frequenz hat ein nicht-triviales Maximum! Bei welchem Wert von a/L liegt das Maximum? Wieso nimmt die Frequenz erst zu und dann ab, wenn man a/L erhöht?
Was muss man bei der Definition von ω^2 beachten, wenn $a > L/2$?

*(f) Im Aufgabenteil (c) haben wir angenommen, dass B und D klein sind. Was ändert sich an den vorliegenden Resultaten, wenn das nicht der Fall ist?

2. Katzen landen auf ihren Füßen — Toastbrote auf der Butterseite

Experimentieren mit Katzen ist nicht nett. Aber die Aussage zu dem Butterbrot lässt sich unschwer experimentell überprüfen, und theoretisch lässt sich das wie folgt begründen. Ein Toastbrot ist ein Quader mit Kantenlängen von etwa $L \times L \times H = 12\,\text{cm} \times 12\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$.

(a) Zu Beginn des Experiments ist eine der Kanten L des Toasts parallel zur Tischkante und der Schwerpunkt hat einen Abstand $Q > 0$ von der Tischkante. Der kleinere Teil des Toastes liegt (noch) in Ruhe auf dem Tisch. Abgesehen von den unterschiedlichen Kantenlängen entspricht dies dem pendelnden Lineal mit der Auslenkung $\theta = \pi/2$. Wie stehen Q und a miteinander in Beziehung?

(b) Wenn er losgelassen wird, kippt der Toast bis er senkrecht steht ($\theta = 0$). Wir nehmen an, dass er in dieser Zeit kaum rutscht. Der Schwerpunkt liegt dann um Q niedriger. Um wie viel hat die potentielle Energie abgenommen? Verwenden Sie die in 1(c) angegebene Formel für die kinetische Energie, um die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ des Brotes abzuschätzen.

(c) Wie hängt die Fallzeit T des Toasts von der Höhe des Tisches H ab? Benutzen Sie das Resultat, um zu zeigen dass

$$\dot{\theta}\, T = \sqrt{\frac{4a}{1 + b\left(\frac{Q}{L}\right)^2} \frac{Q}{L} \frac{H}{L}}\,, \qquad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

*(d) Plotten Sie das Resultat als Funktion von Q/L und markieren Sie in dem Plot auch die Linien für $\dot{\theta}\, T = \pi$ und $\dot{\theta}\, T = 2\pi$, usw. Für welche Werte von Q/L landet der Toast auf der Butterseite? Überprüfen Sie die Vorhersagen des Modells, indem Sie einen Plastikdeckel oder einen ähnlichen Gegenstand vom Tisch kippen lassen. Wie gut ist das Modell? Was ist dran an der Aussage, dass der Toast auf der Butterseite landet?

3. Zwei Massen am Gummiband.

Zwei Teilchen derselben Masse m sind mit einem Gummiband verbunden, dass über einer reibungsfreien Rolle hängt. Die Teilchen befinden sich auf vertikaler Höhe h_1 und h_2.

(a) Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Wir beschreiben das Problem mithilfe der Koordinaten $H = h_1 + h_2$ und $D = h_1 - h_2$. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten die folgende Gestalt annimmt,

$$\mathcal{L}(H, D, \dot{H}, \dot{D}) = \frac{\mu}{2} \left(\dot{H}^2 + \dot{D}^2\right) - m\, g\, H - \frac{k}{2} H^2\,.$$

Hier ist k das Elastizitätsmodul des Gummibandes und μ ist eine effektive Masse. Wie hängt μ mit m zusammen? Die Gleichung verwendet eine spezielle Wahl des Ursprungs für die Höhen h_1 und h_2. Welche?

(c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für H und für D.

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und interpretieren Sie das Resultat.

Ü1. Kreuzprodukte.

Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\,(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \text{Antisymmetrie}$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \text{zyklisches Vertauschen}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \text{bac-cab Regel}$$

Lösen Sie folgende Aufgaben *nur* unter Verwendung dieser Regeln, d.h. ohne je explizit ein Kreuzprodukt in Komponenten auszurechnen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(b) Zeigen Sie: Es gibt Zahlen α, β, γ, δ, so dass

$$\begin{aligned} \vec{x} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} \\ &= \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d}\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie dazu, wie sich α, β, γ, δ aus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ berechnen lassen.

(c) Wie vereinfachen sich die Ausdrücke für $\vec{x}$, wenn zwei der vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ übereinstimmen?

(d) Es sei nun

$$y = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})\,.$$

Wie vereinfacht sich dieser Ausdruck, wenn zwei dieser Vektoren übereinstimmen? Wie vereinfacht sich das Resultat weiter, wenn auch das jeweils andere Paar übereinstimmt?

(e) Zeigen Sie insbesondere, dass sich $y = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,\sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ergibt, wenn $\vec{a} = \vec{c}$ und $\vec{b} = \vec{d}$. Hätten Sie das auch anders sehen können?