Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 20. 6. 2019

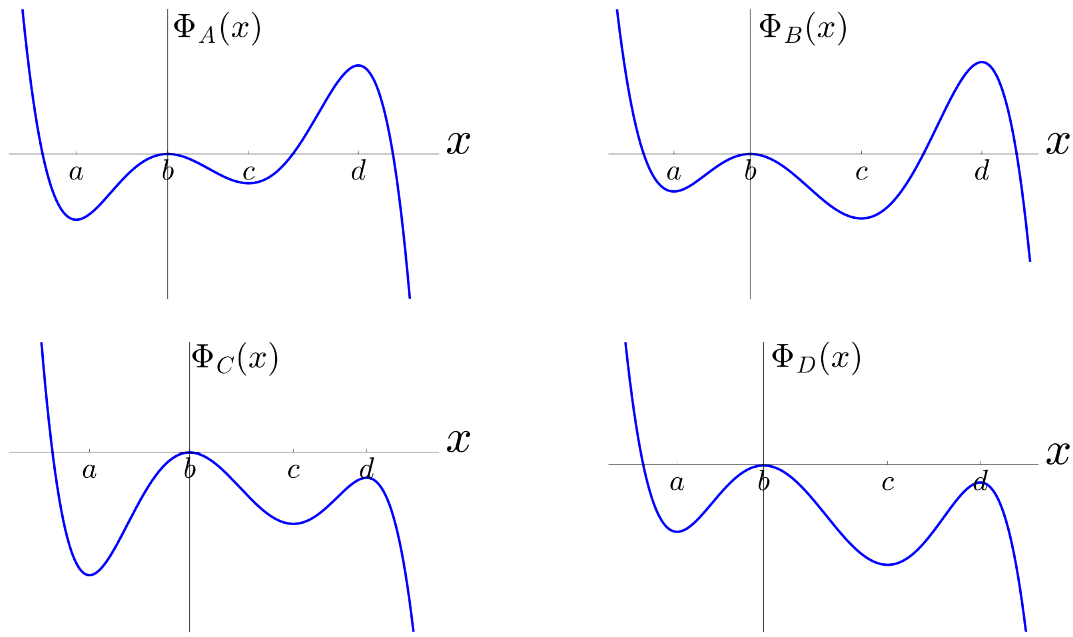
# Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

## Blatt 12. Bewegung Querbeet

Diese Aufgaben sollen einen Eindruck geben, was ich mir vorstelle für die Klausur.

### 1. Potentiale und Phasenraumplots.

Die Abbildungen unten zeigen vier Potentiale $\Phi_A(x)\ldots,\ \Phi_D(x)$. mit Extrema an den Positionen $x \in \{a, b, c, d\}$. Sie unterscheiden sich durch unterschiedliche Tiefe der Minima und Höhe der Maxima.



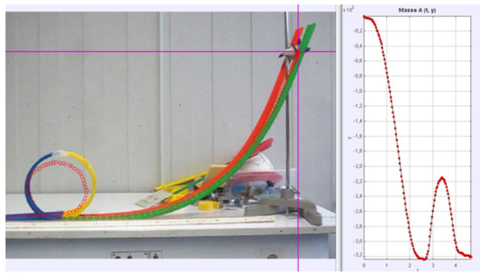

Wir untersuchen in dieser Aufgabe, welche qualitative Auswirkungen auf die Bewegung diese Unterschiede haben. Interaktiv ausprobieren können Sie dies mithilfe folgenderder PhNet Animation.

(a) Es soll Energieerhaltung gelten. Skizzieren Sie die Bewegung im Phasenraum. Beachten Sie dabei insbesondere Bahnen, die kleine Auslenkungen aus den Minima beschreiben und Bahnen, die für $t \to \pm\infty$ in einem der Extrema enden (bzw. beginnen).

(b) Diskutieren Sie nun den Effekt von sehr schwacher Reibung. Wie verändern sich die Bahnen im Phasenraum? Wo enden die Bahnen, die mit Geschwindigkeit Null in der Nähe der Maxima $b$ und $d$ starten? Für welche Potentiale lässt sich diese Frage *nicht* entscheiden?

## 2. Kugel- und Dardabahnen

Eine spannende Herausforderung für kleine und große Kinder ist es Kugelbahnen und Dardabahnen aufzubauen. Ich habe Dardabahnen vom Kleiderschrank gestartet, um auch mit Wagen ohne Antrieb mehrere Loopings zu durchfahren. Schüler des Otto-von-Taube-Gymnasiums haben Videos der Bewegung gedreht und diese mit dem Programm "Tracker" ausgewertet (siehe Bild).



Schulprojekt einer 9. Klasse am Otto-von-Taube-Gymnasium, Gauting

Mathematisch beschreibt man das Durchfahren der Bahn am effektivsten, indem man die Bahn mittels der zurückgelegten Strecke $\ell$ parametrisiert. Die Geschwindigkeit des Wagens in seiner entsprechende Bewegungsrichtung ist dann $\dot{\ell}$; die Höhe der Bahn an der Position $\ell$ sei $H(\ell)$.

(a) Die Masse des Wagens sei $m$. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichung für den Wagen.

(b) Die Bahn führt mit einem Winkel $\varphi$ zur Horizontalen gerade bergab, $H(\ell) = H_0 - \ell\,\sin(\varphi)$. Der Wagen startet in der Höhe $H_0$ mit Geschwindigkeit Null. Lösen Sie die Bewegungsgleichung.
**Bonus:** Welche Maximalgeschwindigkeit erreicht der Wagen, wenn eine Reibungskraft $-\gamma\,\dot{\ell}$ wirkt? Wie sieht die Lösung der Bewegungsgleichung dann aus?
**Hinweis:** Die Bewegungsgleichung ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(c) Nach rasanter Fahrt pendelt der Wagen aus in einem Teil der Bahn, für den $H(\ell) = a\,(\ell - L)^2/2$ gilt. Dabei sind $a$ und $L$ positive Konstanten mit passend gewählten Einheiten. Welche Einheiten haben die Konstanten? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall, dass der Wagen den Punkt $\ell = L$ mit der Geschwindigkeit $v_0$ durchfährt. (Reibung soll zunächst noch nicht berücksichtigt werden.)
**Bonus:** Wie sieht die Lösung der Bewegungsgleichung aus, wenn eine Reibungskraft $-\gamma\,\dot{\ell}$ wirkt?

(d) Der Wagen fährt einen Looping mit Radius $R$. Dort sei $\ell = R\theta$, wobei $\theta$ angibt, wie weit sich der Wagen bewegt hat bezüglich des Eingangs in den Looping unten an der Bahn. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Fahrt durch den Looping und skizzieren Sie die Lösungen im Phasenraum.
**Bonus:** Einige Bahnen sind nicht erlaubt, da der Wagen dann aus der Bahn fällt! Wie schnell muss er mindestens in den Looping fahren, damit er nicht fällt? Welcher Teil des Phasenraumes ist dementsprechend nicht erlaubt?

**3. Flug der Bola.**

Pearson Scott Foresman [Public domain], via Wikimedia Commons

Bolas bestehen aus zwei oder mehr Gewichten, die mit Leinen verbunden sind. Sie werden zum Schwungholen um den Kopf gewirbelt und dann geworfen. Im Flug kreisen die Gewichte um den gemeinsamen Schwerpunkt. Sie werden von südamerikanischen Gauchos zur Jagt und zum Einfangen von Rindern verwendet, ähnlich wie Lassos von Cowboys in Nordamerika. Inuit verwenden sie zur Vogeljagt. Im Kung Fu und beim Jonglieren werden sie Meteor genannt.

Wir betrachten im Folgenden ein elastische Leine der Länge $L$. Es wirkt keine Kraft zwischen den Gewichten, wenn der Abstand $R = |\vec{R}|$ kleiner ist als $L$. Für $R > L$ bewirkt die Leine eine Kraft vom Betrag $k\,(R - L)$ in Richtung auf das jeweils andere Gewicht. Beide Gewichte haben dieselbe Masse $m$. Zusätzlich zur Kraft durch die Leinen wirkt während des Fluges die Gravitationsbeschleunigung $-g$.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt $\vec{Q}$ der beiden Gewichte und den Abstandsvektor $\vec{R}$.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt für den Fall, dass die Bolas mit einer Anfangsgeschindigkeit $\vec{v}_0$ geworfen werden. Der Ausgangspunkt der Flugbahn sei $\vec{Q}_0$.

(c) Zeigen Sie, dass Energie- und Drehimpulserhaltung für die Relativbewegung $\vec{R}(t)$ gilt.
**Hinweis:** Es reicht, wenn Sie sagen, wieso das gilt und auf eine analoge frühere Rechnung verweisen.

(d) Wir werden den Vektor $\vec{R}$ im Folgenden schreiben als $\vec{R} = R\,(\cos\theta, \sin\theta)$. Wieso benötigen wir nur zwei Komponenten? Was legt die dritte Richtung fest? Was bedeutet der Winkel $\theta$?

(e) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für den Betrag $R$ des Abstands der Gewichte mithin beschrieben werden kann als

$$\ddot{R} = \begin{cases} a\,R^{-3} & \text{für} \quad 0 < R < L\,, \\ a\,R^{-3} - \omega^2\,(R - L) & \text{für} \quad L \leq R\,. \end{cases}$$

Von welchen Parametern hängen $a$ und $\omega$ ab? Welchen Einfluss haben die Anfangsbedingung des Wurfes?

(f) Skizzieren Sie die Lösungen dieser Gleichung im Phasenraum.