Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 13. 6. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 11. Zentralkräfte

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. Ein Teilchen unter Einfluss einer harmonischen Zentralkraft.

Ein Testteilchen der Masse m und der Position $\vec{r}(t)$ bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r}\,.$$

(a) Wir interessieren uns in dieser Aufgabe für gebundene Trajektorien, d.h. $r(t) = |\vec{r}(t)|$ soll für alle Zeiten nach oben beschränkt sein. Welche Bedingung muss man dann an k stellen?

(b) Bestimmen Sie die Energie des Teilchens und zeigen Sie, dass die Energie erhalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times m\,\dot{\vec{r}}$ des Teilchens erhalten ist. Gilt dies auch bei einer anderen Wahl des Koordinatenursprungs?
Hinweis: Das Zentrum des Kraftfelds befindet sich dann nicht mehr im Koordinatenursprung.

(d) Es seien nun (x_1, x_2) die Koordinaten in der durch den Drehimpuls festgelegten Ebene. Zeigen Sie, dass $m\ddot{x}_i(t) + k\,x_i(t) = 0$ für $i \in \{1, 2\}$. Geben Sie die Lösung dieser Gleichung an. Skizzieren Sie die Bahnen im Phasenraum $(x_i, \dot{x}_i)$.

* (e) Zeigen Sie, dass $(x_1(t), x_2(t))$ eine Ellipsenbahn beschreibt.

(f) Berechnen Sie den Drehimpuls und die Energie basierend auf der in (d) gefundenen Lösung.

2. Zwei Teilchen mit harmonischer Wechselwirkung.

Betrachten Sie nun zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 an den Positionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$. Die Wechselwirkung sei eine harmonische Kraft, so dass

$$m_1\,\ddot{\vec{q}}_1(t) = -k\,(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t))\,,$$
$$m_2\,\ddot{\vec{q}}_2(t) = -k\,(\vec{q}_2(t) - \vec{q}_1(t))\,.$$

(a) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes der beiden Teilchen. Wie bewegt sich der Schwerpunkt, und wie hängt diese Bewegung von den Anfangsbedingungen $\big(\vec{q}_1(t_0), \vec{q}_2(t_0), \dot{\vec{q}}_1(t_0), \dot{\vec{q}}_2(t_0)\big)$ ab?

(b) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung der Relativbewegung. Diskutieren sie die Lösung dieser Gleichung unter Verwendung der Resultate aus Aufgabe 1.

* (c) Wie unterscheiden sich die resultierenden elliptischen Bahnen von denen des Keplerproblems?

3. Ellipsenbahn für das Keplerproblem.

In der Vorlesung haben wir die Bewegung von zwei Himmelskörpern der Massen m_1 und m_2 an den Positionen $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ diskutiert, die mittels der Gravitation wechselwirken. Die Bewegung des Schwerpunktes verläuft gleichförmig und gradlinig. Für die Relativkoordinate $\vec{R} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$ ermittelten wir die Bewegungsgleichung,

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{M\,G}{|\vec{R}|^3}\,\vec{R}$$

mit $M = m_1 + m_2$ und der Gravitationskonstante $G \simeq 6.67\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$. Für die Herleitung der Keplerschen Gesetze der Planetenbahnen müssen wir mittels der Drehimpulserhaltung daraus eine Bewegungsgleichung für den Betrag $R(t) = |\vec{R}(t)|$ ermitteln. Wir nehmen hier an, dass $\vec{R}$ in der (x, y)-Ebene liegt, und verifizieren die Konsistenz dieser Annahme in Aufgabenteil (b).

(a) Schreiben Sie die Position (x, y) in Polarkoordinaten $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\theta = \arctan(y/x)$ und zeigen Sie, dass die Radial- und Winkelkomponenten dann folgenden Bewegungsgleichungen genügen

$$\ddot{R} - R\,\dot{\theta}^2 = -\frac{M\,G}{R^2}\,,$$
$$R\,\ddot{\theta} + 2\dot{R}\,\dot{\theta} = 0\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls für die beiden Planeten in Polarkoordinaten folgende Form annimmt

$$\vec{L} = m_1\,\vec{q}_1 \times \dot{\vec{q}}_1 + m_2\,\vec{q}_2 \times \dot{\vec{q}}_2 = m\,R^2\,\dot{\theta}\,\hat{z} = L_z\,\hat{z}\,,$$

wobei m eine Konstante mit der Einheit Masse ist. Ermitteln Sie m und benutzen Sie das Resultat aus (a), um zu zeigen, dass L_z erhalten ist.

(c) Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung, um $\dot{\theta}$ in der Gleichung für $\ddot{R}$ eliminieren, und zeigen Sie so dass

$$\ddot{R} - \frac{L_z^2}{m^2\,R^3} + \frac{M\,G}{R^2} = 0\,.$$

(d) Die Bewegungsgleichung aus (c) entspricht der Bewegung eines Teilchens an der Position R in einem eindimensionalen Potential $\Phi(R)$, wobei Energieerhaltung in folgender Form gelten soll

$$E = \frac{m}{2}\dot{R}^2 + \Phi(R)\,.$$

Ermitteln Sie $\Phi(R)$.