Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 6. 6. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 10. Potentiale und Phasenraumplots

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. Potentiale für eindimensionale Bewegung.

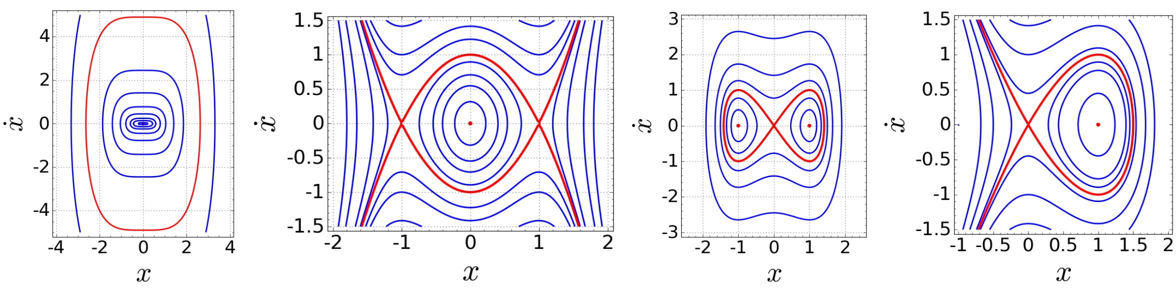
Wir untersuchen in dieser Aufgabe das qualitative Verhalten von Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = a\,x + b\,x^2 + c\,x^3 \qquad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) Interpretieren Sie x als Position eines Teilchens in einem Potential und die rechte Seite als Kraft, die vermittels einer Ableitung aus einem Potential berechnet werden kann. Bestimmen Sie das zugehörige Potential. Es soll Null ein an der Stelle $x = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Positionen der Ruhelagen für das System und ob die Funktion dazwischen Monoton fallen oder steigend ist. Was bedeutet dies für die Bewegung einer Kugel in einem solchen Potential?

(c) Die Abbildungen unten zeigen vier Phasenportraits der Differentialgleichung. Suchen Sie sich 2 Fälle aus und diskutieren Sie, ob die Konstanten a, b und c dort jeweils positiv, negativ oder Null sind.



(d) Skizzieren Sie zu den von Ihnen untersuchten Phasenportraits jeweils das zugehörige Potential.

2. Teilchen im Mexikanerhut-Potential.

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem rotationssymmetrischen Potential

$$\Phi(r) = \frac{m\,A}{4}\, r^2\, (r^2 - 2\, r_0^2)$$

Die Bewegung erfolgt in einer Ebene und soll mit Polarkoordinaten (r, θ) beschrieben werden.

(a) Skizzieren Sie das Potential. Wo liegen die Maxima und Minima?

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses Problem auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $\theta(t)$ und $r(t)$.
Bonus. Der Drehimpuls und die Energie des Teilchens sind erhalten. Woran sieht man das?

(c) Ermitteln Sie eine geeignete Frequenz ω, Längenskala ℓ und eine Konstante K, so dass

$$\frac{\ddot{\hat{r}}}{\omega^2} = \hat{r} - \hat{r}^3 + \frac{K}{\hat{r}^3} \qquad \text{für} \quad \hat{r}(t) = r(t)/\ell\,.$$

(d) Die Gleichung lässt sich einmal integrieren, nachdem man $\dot{r}$ multipliziert hat. Zeigen Sie, dass dies impliziert, dass der folgende Ausdruck zeitlich konstant ist

$$E = \frac{\dot{\hat{r}}^2}{2\omega^2} + V_{\text{eff}}(\hat{r}) \qquad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(\hat{r}) = \frac{\hat{r}^4}{4} - \frac{\hat{r}^2}{2} + \frac{K}{2\,\hat{r}^2}\,.$$

Bonus. Vergleichen Sie den Ausdruck mit der Summe aus kinetischer und potentieller Energie. Wie hätte man diesen Zusammenhang unmittelbar erkennen können?

(e) Skizzieren Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\hat{r})$ und die Phasenportraits für $K > 0$.
Bonus. Wieso muss man den Fall $K = 0$ gesondert untersuchen?

3. Dosenpendel.

Das Bild rechts zeigt ein Dosenpendel: ich habe dort zwei schwere Magneten mit derselben Masse M innen an einer leeren Konservendose befestigt. Wenn ich die Dose loslasse, beginnt Sie zu oszillieren. Wenn ich ihr einen Stoß gebe wird Sie gradlinig über den Tisch rollen. Wir beschreiben die Position der Magneten bei der Bewegung durch dem Winkel θ zwischen der Lotrechten und der kürzesten Verbindung der Symmetrieachse der Dose zum Magneten. In der Vorlesung haben wir den Fall behandelt, in dem beide Magneten unter demselben Windel θ befestigt waren.

(a) Die beiden Magneten seien nun in einem Winkel α voneinander am Rand befestigt. Bestimmen Sie die potentielle und kinetische Energie. Dabei sei die Masse der Dose vernachlässigbar gegen jene der Magneten. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für θ.

(b) Diskutieren Sie den Fall $\alpha = \pi$. Wie bewegt sich die Dose in diesem Fall? Zeichnen Sie die Bahnen im Phasenraum.

(c) Ermitteln Sie die Gleichgewichtslagen der Dose und argumentieren Sie aufgrund ihres physikalischen Sachverstand, ob sie stabil oder instabil sind. Skizzieren Sie anschließend die Bahnen im Phasenraum, für den Fall, dass $\alpha \neq 0$.

*(d) Für $\alpha = 0$ sollte sich die Bewegungsgleichung ergeben, die wir auch in der Vorlesung bestimmt haben

$$0 = 2\ddot{\theta}\,\big(1 - \cos\theta\big) + \dot{\theta}^2 \sin\theta + \omega^2\,\sin\theta$$

Wie hängt ω vom Radius der Dose, den Massen der Magnete und der Schwerkraftsbeschleunigung ab?

Zeigen Sie, dass die Gleichung erheblich einfacher wird, wenn man anstatt θ die Variable $\xi = \cos(\theta/2)$ einführt, denn dann ergibt sich

$$\ddot{\xi} = \frac{\omega^2}{4}\,\xi$$

Hinweise: 1. Beachten Sie wiederum, dass $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ sowie $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

2. Berechnen Sie $\dot{\xi}$ und ermitteln Sie die resultierende Beziehung zwischen $\dot{\theta}$ einerseits und $\dot{\xi}$ und θ andererseits.

3. Berechnen Sie $\ddot{\xi}$ und untersuchen Sie dann $2\,\sin(\theta/2)\,\ddot{\xi}$. Eliminieren Sie in diesem Ausdruck $\ddot{\theta}$ durch die Bewegungsgleichung. Im nächsten Schritt eliminieren Sie $\dot{\theta}$ durch die Beziehung aus 2.

4. Wenn es gut ist können Sie abschließend $\sin(\theta/2)$ kürzen und erhalten das angegebene Resultat.

*(e) Welche Anfangswerte an ξ beschreiben die Bewegung der Dose, wenn wir sie in dem Bild loslassen? Welche Anfangswerte an ξ beschreiben die Bewegung der Dose, wenn wir sie aus der Ruhelage anstoßen? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für ξ für diese Anfangsbedingungen.

*(f) Ermitteln Sie basierend auf dem Resultat aus (c) die Bahn von $\theta(t)$. Was ist dabei zu beachten, wenn $\sin(\theta/2) = 0$?