Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 24. 5. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 8. Lösungen von Bewegungsgleichungen

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. Harmonischer Oszillator mit Reibung.

Ein harmonischen Oszillator erfährt eine Rückstellkraft, $-k\,(q(t)-q_*)$, die proportional ist zur Auslenkung $q(t)-q_*$ aus der Ruhelage q_*. Wenn die Auslenkungen klein sind, gilt dies beispielsweise in sehr guter Näherung für ein Teilchen der Masse m, dass an einer Federn oder einem Pendel hängt. In diesen Systemen wirkt weiterhin eine Reibung, $\gamma\dot{q}(t)$, die für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise linear ist. Mithin gilt folgende Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{q}(t) = -k\,(q(t)-q_*) - \gamma\,\dot{q}(t)$$

(a) Die Bewegungsgleichung ist linear mit konstanten Koeffizienten. Wir wählen also den Lösungsansatz $q(t)-q_* = A_i\,\exp(\lambda_i t)$. Zeigen Sie, dass dieser Ansatz auf eine quadratische Gleichung für λ_i führt und bestimmen Sie die beiden Lösungen λ_1 und λ_2.

(b) Für große Reibung sind die Lösungen reell, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wie groß muss γ sein, damit die Reibung in diesem Sinne groß ist?
Wie sieht die Lösung der Bewegungsgleichung, $q(t)$, dann aus, wenn das Teilchen zur Zeit t_0 mit einer Auslenkung $q(t_0) = q_* + A$ losgelassen wird?
Wie sieht die Lösungen der Bewegungsgleichung aus, wenn das Teilchen zur Zeit t_0 aus der Ruhelage mit einer Geschwindigkeit v_0 in Bewegung gesetzt wird?

(c) Skizzieren Sie die in (b) ermittelten Bahnen $q(t)$. Welchen Einfluss haben m, k und γ?

(d) Betrachten Sie nun den Fall kleiner Reibung. Zeigen Sie zunächst, dass λ_1 und λ_2 komplex konjugierte komplexe Zahlen sind. Wir verwenden die Notation $\lambda_1 = -\kappa + \mathrm{i}\omega$ und $\lambda_2 = -\kappa - \mathrm{i}\omega$.
Wie sieht die Lösung der Bewegungsgleichung, $q(t)$, dann aus, wenn das Teilchen zur Zeit t_0 mit einer Auslenkung $q(t_0) = q_* + A$ losgelassen wird?
Wie sieht die Lösungen der Bewegungsgleichung aus, wenn das Teilchen zur Zeit t_0 aus der Ruhelage mit einer Geschwindigkeit v_0 in Bewegung gesetzt wird?

(e) Skizzieren Sie die in (d) ermittelten Bahnen $q(t)$. Welchen Einfluss haben m, k und γ, beziehungsweise ω und κ?

2. Energie eines harmonischen Oszillators in Gravitationsfeld

Wir betrachten ein Teilchen der Masse M, welches unter Einfluss der Erdbeschleunigung g an einer Hookschen Feder[1] mit Federkonstante k aufgehängt ist. Die Feder soll sich nur vertikal bewegen.

(a) Skizzieren Sie den Aufbau. Dabei soll $z(t)$ die Auslenkung von der Ruhelänge der Feder sein. Welche Kraft $F(z)$ wirkt auf das Teilchen?

(b) In der Vorlesung haben wir mit dem Lagrange-Formalismus die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung hergeleitet:

$$z(t) = z_0 + A\,\sin(\varphi + \omega t)$$

Berechnen Sie, um sich davon zu überzeugen, explizit beide Seiten der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$M\,\ddot{z}(t) = F(z(t))\,.$$

Unter welchen Bedingungen an z_0 und ω ist die angegebene Funktion $z(t)$ ein Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung?
Gibt es auch Anforderungen an A und φ? Wenn nein: Warum nicht?

(c) Bestimmen Sie durch explizites Nachrechnen, dass die Energie E konstant ist,

$$E = T + V = \frac{k}{2}\left(A^2 - z_0^2\right)$$

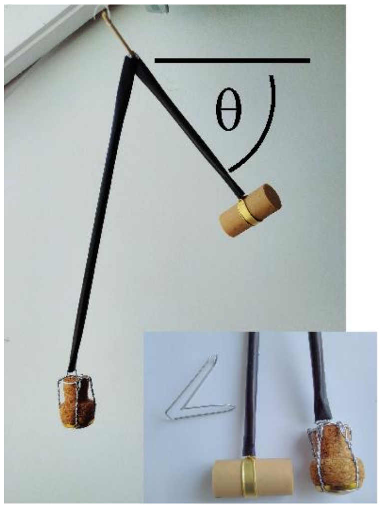
Die beiden Terme haben eine unmittelbare Interpretation:

- $kA^2/2$ ist die potentielle Energie bei maximaler Auslenkung, d.h. am Umkehrpunkt der Bewegung, wenn $T = 0$.
- $kz_0^2/2$ ist die potentielle Energie der Feder aufgrund der gravitationsbedingten Auslenkung aus der Ruhelänge in die Position z_0. Wieso hat dieser Term aber ein negatives (!!) Vorzeichen?

[1] Eine Hooksche Feder führt zu einer harmonischen Rückstellkraft.

3. Das Küchenpendel

Aus zwei Strohhalmen (Längen L_1 und L_2), zwei Korken (Massen m_1 und m_2), einer Büroklammer und etwas Verpackungsmaterial bastelt man einfach das hier abgebildete Pendel. Ich habe es an einem Schaschlikspieß aufgehängt und zur Stabilisierung eine Feder aus einem alten Kuli eingebaut. So pendelt es in einer Ebene senkrecht zum Spieß. Der Winkel zwischen den beiden Armen sei α. Die Auslenkung des rechten Armes bezüglich der Horizontalen ist $\theta(t)$.



(a) Bestimmen Sie die kinetische Energie und die potentielle Energie des Pendels. Begründen Sie, dass diese beiden Größen nur von $\theta(t)$ und $\dot{\theta}(t)$ abhängen. Stellen Sie von daher die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ auf.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Pendels.

(c) Was ist die Ruhelage? Welche Bewegung findet man für kleine Auslenkungen? Zeichnen Sie das Phasenportrait.

(d) Die Bewegungsgleichung wird erheblich übersichtlicher, wenn man den Schwerpunkt der beiden Korken als Referenzpunkt wählt. Zeigen Sie, dass sich der Schwerpunkt direkt unterhalb des Spießes befindet, wenn das Pendel in Ruhe ist.

*(e) Es sei ℓ der Abstand des Schwerpunktes von der Pendelachse und φ die Auslenkung des Schwerpunktes aus der Senkrechten. Stellen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ auf und bestimmen sie wiederum die Bewegungsgleichungen. Sehen Sie, wie die Gleichungen für $\ddot{\theta}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$ miteinander in Beziehung stehen?