Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 9. 5. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 6. Koordinatentransformationen, Rotationen, Matrizen

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. 2D Rotationen und Spiegelungen bilden eine Gruppe.

Wir betrachten Koordinatentransformationen, die beschrieben werden durch Transformationsmatrizen

$$\mathcal{T}_\sigma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sigma \sin\theta & \sigma \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{with } \theta \in [0, 2\pi), \sigma \in \{\pm 1\}\,.$$

Für $\sigma = 1$ entspricht dies den Rotationen, $\mathcal{D}(\theta)$, der Koordinatenachsen in der Ebene um einen Winkel θ.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{-1}(\theta) = \mathcal{S}_y\, \mathcal{D}(\theta)$, wobei $\mathcal{S}_y$ eine Diagonalmatrix ist mit den Einträgen ± 1 auf der Diagonalen. Wie muss man diese Einträge wählen, damit die angegebene Gleichung gilt? Was für eine Koordinatentransformation wird von dieser Matrix beschrieben?

(b) Welche Matrix $\mathcal{M}$ beschreibt das vertauschen der beiden Basisvektoren, die für die Beschreibung hier herangezogen wurden? Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}\,\mathcal{D}(\theta) = \mathcal{T}_{-1}(\theta + \pi/2)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Transformationen $\mathcal{T}_\sigma(\theta)$ eine Gruppe von Transformationen bilden. Ist dies eine kommutative Gruppe?

(d) Zeigen Sie, dass die Transformationen $\mathcal{T}_\sigma(\theta)$ die die Länge eines Vektors $\vec{x}$ invariant lassen, d.h.

$$||\mathcal{T}_\sigma(\theta)\,\vec{x}|| = ||\vec{x}||,$$

und dass auch der Betrag des Kreuzproduktes invariant ist.

*(e) Was geschieht, wenn man *zusätzlich* auch Translationen, d.h. Verschiebungen des Koordinatenursprungs im Raum zulässt? Ist dies immer noch eine Gruppe? Bleibt die Länge eines Vektors $\vec{x}$ erhalten? Wie steht es um die Längendifferenz von Vektoren?

2. Rotation in 3 Dimensionen.

In drei Dimensionen gibt es drei unabhängige Rotationsachsen durch den Ursprung. Eine Rotation um den Winkel α, die die dritte Koordinatenrichtung nicht ändert, lässt sich darstellen als Multiplikation des Ortsvektors $\vec{q}$ mit der Drehmatrix[1]

$$\mathcal{D}^\dagger(\hat{3},\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Die Rotationsmatrizen für Rotationen bezüglich der anderen Koordinatenachsen erhält man durch zyklische Permutation der Achsen. Sie lassen sich also generieren durch die Transformationsmatrix

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wie wirkt die Transformation $\mathcal{Z}$ auf die Einheitsvektoren $\hat{e}_1 = (1,0,0)$, $\hat{e}_2 = (0,1,0)$, $\hat{e}_3 = (0,0,1)$? Wie auf die Drehmatrix $\mathcal{D}(\hat{3},\alpha)$?

(b) In drei Dimensionen kommutieren Drehungen nicht mehr. Verifizieren Sie dies anhand eines Beispiels.

(c) Zeigen Sie: Die Rotation um einen Winkel α bezüglich einer beliebigen Achse, gegeben in Polarkoordinaten (θ,ϕ), lässt sich schreiben als Produkt von drei Transformationen:
1. Drehung der Achse (θ,ϕ) in die Vertikale.
2. Drehung um den Winkel α um die Senkrechte.
3. Zurückdrehen der Vertikalen nach (θ,ϕ).

(d) Welche Beziehung besteht für eine allgemeine dreidimensionale Rotation $\mathcal{R}$ zwischen

$$(\mathcal{R}\vec{a}) \times (\mathcal{R}\vec{b}) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{R}(\vec{a}\times\vec{b})\,?$$

Hinweis: Berechnen Sie das Spatprodukt der beiden Ausdrücke mit $\mathcal{R}\vec{c}$ für einem beliebigen Vektor $\vec{c}$ und benutzen Sie die geometrische Interpretation des Spatproduktes.

(e) Wir wählen ein Koordinatensystem, bei dem $\hat{x}$ nach rechts zeigt, $\hat{y}$ nach hinten und $\hat{z}$ nach oben. Ein Würfel liegt mit seinem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems, die Eins schaut nach vorne, die Zwei nach oben. Bestimmen Sie die Drehmatrizen, die den Würfel in folgende Konfigurationen überführen
1. Sechs oben und Fünf vorne.
2. Sechs vorne und Drei oben.
3. Die Ecke Eins-Zwei-Drei schaut senkrecht nach oben und die Kante Eins-Drei liegt in der y,z-Ebene.

[1] Beachten Sie, dass ich hier die Transposition der Matrix für die Transformation der Koordinaten verwende. Diese Matrix beschreibt die Änderung der *Position* des Körpers im Raum. Überzeugen Sie sich davon durch Betrachten der zweidimensionalen Rotationen!

3. Zweidimensionale Rotationen und komplexe Zahlen.

In der Ebene können die Koordinaten (x, y) auch aufgefasst werden als komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, mit $\mathrm{i}^2 = -1$ und den Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} &= \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1)
\end{aligned}
$$

Weiterhin ist die *Konjugation* z^* einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ definiert als $z^* = x - \mathrm{i}y$.

(a) Welche Operation beschreibt eine Rotation um α in der komplexen Ebene?

(b) Welche Operation beschreibt eine Translation in der komplexen Ebene?

(c) Welche Operation beschreibt eine Spiegelung in der komplexen Ebene?

(d) Wie kann dies die Nachweise in Aufgabe 1 erleichtern?