Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 2. 5. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 5. Erhaltungsgrößen

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. Elastische 2-Teilchen-Stöße: Billiard spielen in 2D und 3D.

Wir betrachten die Bahn von zwei Kugeln, $i \in \{1, 2\}$, mit Massen m_i und Radien R_i an den Postitionen $\vec{q}_i \in \mathbb{R}^3$. Zu Beginn des Experimentes, zur Zeit t_0, haben Sie die Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}_i(t_0) = \vec{v}_{0,i}$.

(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $\vec{Q}(t)$ des Systems. Wie bewegt sich der Schwerpunkt im Weltraum (d.h. ohne äußere Kräfte)? Welche Bahn beschreibt er auf der Erde mit $\vec{g} = -g\hat{z}$?

(b) Im folgenden betrachten wir die Relativbewegung der Kugeln im Schwerpunktsystem (SPS). Die Positionen der Kugeln im SPS sei $\vec{x}_i(t) = \vec{q}_i(t) - \vec{Q}(t)$ und die Impulse $\vec{p}_i(t) = m_i\,\dot{\vec{x}}_i(t)$. Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingungen immer folgende Beziehungen gelten

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \text{so dass} \quad \vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{L}_1 = \vec{x}_1 \times \vec{p}_1 \quad \text{und} \quad \vec{L}_2 = \vec{x}_2 \times \vec{p}_2 \quad \text{so dass} \quad \vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times \vec{p}_2\,.$$

Dabei ist $\vec{L}_i$ der Drehimpuls bezüglich des Schwerpunktes von Kugel i und der Übersichtlichkeit halber wurde die Zeitabhängigkeit der Größen nicht explizit ausgeschrieben.

*(c) Zeigen Sie, dass $\vec{x}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{p}_2$ immer in einer Ebene liegen. Entweder gehen Sie dazu in zwei Schritten vor:
Warum gilt dies für die Anfangsbedingungen? Warum ändern sich diese Eigenschaft im Laufe der Zeit nicht?
... oder Sie zeigen, dass $\vec{x}_2$ und $\vec{p}_2$ senkrecht stehen zu $\vec{L}_1$. (Wieso beweist dies die Behauptung?)

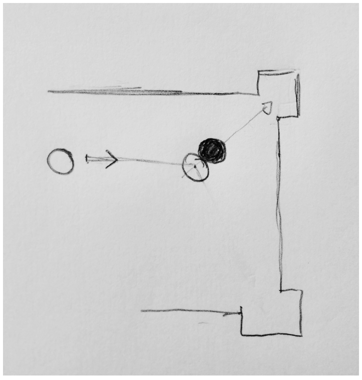
(d) Zeigen Sie, dass sich die Kugeln nur dann stoßen, wenn $|\vec{L}_{\text{ges}}|/|\vec{p}_2| < R_1 + R_2$. Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (b) und überlegen Sie, welchen Abstand die Kugeln mindestens haben müssen, damit Sie nicht stoßen.

(e) Wir beschreiben die Bewegung der Teilchen im SPS nun wie folgt mittels der orthonormalen Basis-Vektoren $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$: Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Schwerpunkt. Beim Stoß liegen die Mittelpunkte der Kugeln auf der β-Achse. Skizzieren Sie in diesen Koordinaten die Bahn der Kugeln vor dem Stoß. Zeigen Sie, dass die Teilchen nach dem Stoß folgenende Impulse haben:

$$\vec{p}_i^{\,\mathrm{out}} = \vec{p}_i(t_0) - 2\hat{\beta}\,\left(\hat{\beta}\cdot\vec{p}_1(t_0)\right).$$

Diskutieren Sie dazu den Drehimpuls und die kinetische Energie.
Skizzieren Sie die Bahnen. Was geschieht geometrisch?

(f) Verwenden Sie die Teilresultate der vorhergehenden Aufgabenteile, um die Positionen der Kugeln $\vec{q}_i(t)$ explizit anzugeben.



*(g) Die nebenstehende Skizze zeigt einen Billiardtisch. Mit der weißen Kugel muss die schwarze Kugel oben rechts in die Ecke versenkt werden. Was muss man bei der skizzierten Bahn beachten? Was wären gegebenenfalls günstigere Alternativen?

2. Inelastische Stöße, Ballistik und Kinohelden.

Zunächst diskutieren wir ein paar Methoden von CSI zur Untersuchung von Schusswaffen. Dann fragen wir uns, wie Kino-Helden schießen.

(a) Zur Ermittlung der Geschwindigkeit eines Profils kann man einen Holzblock (Masse: M) dergestalt an einem Arm (Länge: L) aufhängen, dass er sich horizontal im Kreis bewegen kann. Die Bewegung sei in der $(x - y)$-Ebene und wir legen unser Koordinatensystem so, dass der Mittelpunkt des Kreises im Ursprung liegt. Die Position des Armes geben wir an als Winkel θ bezüglich der x-Achse. Zu Beginn des Experimentes ist der Arm in Ruhe an der Position $\theta = 0$. Die Flugbahn des Projektils verläuft parallel zur y-Achse, so dass es zur Zeit t_0 in die Mitte des Holzblockes einschlägt. Das Projektil hat die Masse m und die Geschwindigkeit $\vec{v}_0$. Skizzieren sie den Messaufbau.

(b) Diskutieren Sie den Drehimpuls bezüglich des Koordinatenursprungs. Welchen Drehimpuls haben Holzblock und Projektil vor dem Einschlag? Welchen danach? Wie schnell dreht sich dann also der Holzblock?
Bonus: Wieso ist es in diesem Falle sinnvoll den Drehimpuls bezüglich des Koordinatenursprungs zu diskutieren und nicht den bezüglich des Massenschwerpunktes?

(c) Der Name von Stanley Kubricks Film *Full Metal Jacket* nimmt Bezug auf den Namen von Vollmantelgeschossen, d.h. die Projektile der im Vietnamkrieg verwendeten Sturmgewehre. Die Kugeln sind 10 g schwer. Sie versetzen einen 1 kg Holzklotz, der an einem Arm der Länge 1 m aufgehängt ist, in eine Winkelgeschwindigkeit von 8 Hz. Wie schnell fliegen die Kugeln?

Die Kugeln einer 9 mm Luger Pistole wiegen 8 g und sie werden mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 350 m/s abgeschossen. Welche Winkelschwindigkeit $\dot{\theta}$ findet man dann?

(d) Alternativ kann man die Messung durchführen, indem man die Kugel in einen Holzblock (Masse M) schießt, der an einer Schaukel (Länge L) hängt. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung, um die Geschwindigkeit der Schaukel direkt nach dem Einschlag zu bestimmen. Bestimmen Sie daraus die kinetische Energie und verwenden Sie dann Energieerhaltung, um die maximale Höhe der Schaukel zu bestimmen.

Es sei $L = 2\,\mathrm{m}$. Wie groß muss die Masse M gewählt werden, damit die Schaukel bis zur Höhe der Aufhängung auslenkt?
Bonus: Was sagt Ihnen dies über den Rückstoß der Waffen? Was wird passieren, wenn man aus der Hüfte schießt wie Rambo?

Bestimmen Sie die kinetische Energie des Projektils und vergleichen Sie den Wert mit der Energie der Schaukel nach dem Einschlag. Woher rührt die Energiedifferenz?

3. Energie-Eintrag beim Abbremsen einer Kugel.

Die Verformung der Kugeln und den mit dem Abbremsen einhergehenden Energie-Eintrag untersuchen CSI-Techniker anhand von Schüssen in einen Gelantineblock. Die Kugel wird dabei abgebremst von einer Reibungskraft F_r. Sie rührt daher, dass die Gelantine jeweils auf die Geschwindigkeit der Kugel beschleunigt werden muss, um in "Echtzeit" aus dem Weg zu gehen.

(a) Die Reibungskraft ermittelt man aus der Erhaltung der kinetischen Energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{m}{2}v^2\Big) = -\frac{\frac{\rho V}{2}v^2}{T}\,. \tag{1}$$

Dabei ist m die Masse und V das Volumen der Kugel; ρ ist die Massendichte der Gelantine. Mithin ist ρV die Masse eines Gelantineblocks, der dasselbe Volumen V hat, wie die Kugel. Diese Volumen wird der Zeit T in Bewegung versetzt, damit die Kugel vordringen kann. Wie muss T von der Länge der Kugel und von ihrer Geschwindigkeit abhängen?

Zeigen Sie, dass dies auf folgende Bewegungsgleichung für die Kugel führt,

$$\dot{v}(t) = -\frac{A\,\rho}{2\,m}\,v^2(t)\,.$$

Wie hängt A von den zuvor gegebenen Größen ab?

(b) Bestimmen sie die Lösung der Bewegungsgleichung (1). Kann man daraus entscheiden, wie tief die Kugel in den Block eindringt?