Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Mi, 24. 4. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 4. Bewegungsgleichungen und Newtons Gesetze

1. Konservative Kräfte.

Fassen Sie folgende Vektorfelder als Kraft auf ein Teilchen auf

$$\vec{K}_1(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$$

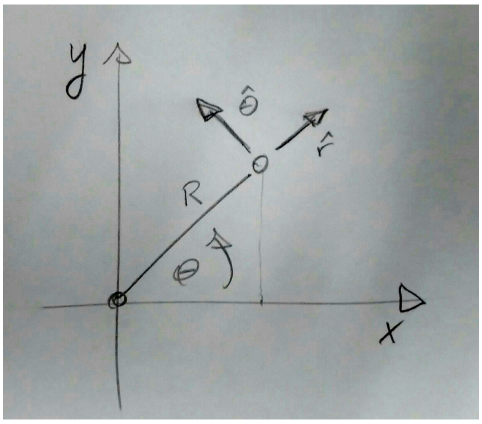
$$\vec{K}_2(x,y,z) = \big(x^2+y^2, x^2-y^2, 0\big)$$

$$\vec{K}_3(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

(a) Berechnen Sie die Rotation, um zu schauen, welche der Kräfte konservativ sind.

(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential.
Hinweis: Das Potential $\Phi(\vec{q})$ eines konservativen Kraftfeldes lässt sich auffassen, als die Arbeit um von einem fest gewählten Bezugspunkt $\vec{q}_0$ nach $\vec{q}$ zu gelangen.

2. Kreisbewegung in Polarkoordinaten.



Die Position eines Teilchens in der Ebene kann angegeben werden mittles kartesischer Koordinaten (x,y) oder mittels Polarkoordinaten mit den Basisvektoren $\hat{r}(\theta)$ und $\hat{\theta}(\theta)$, mit den folgenden kartesischen Koordinaten (siehe Skizze links)

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Bahn eines Teilchens $\vec{q}(t)$ mit Masse m, dass sich auf einem Kreis mit Radius R bewegt.

(a) Verifizieren Sie, dass $\hat{\theta} = \partial_\theta \hat{r}$ and $\partial_\theta^2 \hat{r} = -\hat{r}$.
Können Sie das Resultat *geometrisch* interpretieren?

(b) Die Position des Teilchens kann angegeben werden als $\vec{q}(t) = R\,\hat{r}(\theta(t))$. Bestimmen Sie $\dot{\vec{q}}$ und $\ddot{\vec{q}}$ ausgehend von dieser Gleichung, und überprüfen Sie das Resultat durch die Rechnung in kartesischen Koordinaten.

(c) Welche Kraft ist nötig, damit das Teilchen auf dem Kreis läuft? Wie steht es bei Kurven von Radrennbahnen, Bobbahnen und in Skateparks?

(d) Betrachten Sie die Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, $\theta(t) = \omega t$ und zeigen Sie, dass in dem Fall die Beschleunigung $\ddot{\vec{q}} = -R\,\omega^2\,\hat{r}(\omega t)$ senkrecht zur Geschwindigkeit $\dot{\vec{q}}$ steht. Was bedeutet dies für den Betrag der Geschwindigkeit?

3. Archimedische Schraube.

Die Archimedische Schraube wird seit der Antike zum Pumpen von Wasser verwendet. In Deutschland findet man sie vielfach auf Wasserspeilplätzen (siehe Bild). Wir untersuchen, wie Wasser befördert wird, wenn die Pumpe mit einer konstanten Kreisfrequenz ω gedreht wird. Wie bei der Beschreibung der Wendeltreppe in der Vorlesung wählen wir Zylinderkoordinaten, d.h. Polarkoordinaten senkrecht zur Spindelachse und die dritte Koordinatenrichtung entlang der Spindel. Die Position, an der das Wasser steht, zeigt immer nach unten und ist von daher zeitabhängig

Dirk Ingo Franke [commons.wikimedia]

$$\vec{q} = \big(R\,\cos(\omega\,t), R\,\sin(\omega\,t), h\,\omega\,t/(2\,\pi)\big)\,.$$

(a) Es sei θ der Winkel zwischen der Spindelachse und der Richtung von $\vec{g}$, senkrecht nach unten. Zeigen Sie, dass $\vec{g}$ bezüglich der für die Beschreibung der Archimedischen Schraube gewählten Basis die folgenden Koordinaten hat

$$\vec{g} = \big(g\,\sin\theta\,\cos(\omega\,t), g\,\sin\theta\,\sin(\omega\,t), g\,\cos\theta\big)\,.$$

(b) Wenn man dreht legt das Wasser einen Weg γ zurück. Wie sieht dieser Weg aus?

(c) Bestimmen Sie die an einem Wasservolumen der Masse M entlang des Weges γ verrichtete Arbeit.
Hinweis: Berechnen Sie dazu folgendes Integral

$$W = \int_\gamma \mathrm{d}\vec{q}\cdot M\,\vec{g}\,.$$