Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Do, 18. 4. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 3. Skalarprodukte, Koordinaten, Wege, Kräfte

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. Polynome bilden einen Vektorraum

Wir betrachten die Menge der Polynome $\mathbb{P}_N$ vom Grad N mit reellen Koeffizienten p_n, $n \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathbb{P}_N := \left\{ \vec{p} = \left(\sum_{k=0}^{N} p_n\, x^k \right) \quad \text{mit} \;\; p_n \in \mathbb{R}, n \in \{0, \dots, N\} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}_N, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist, wobei die Verknüpfungen für

$$\vec{p} = \left(\sum_{k=0}^{N} p_n\, x^k \right) \in \mathbb{P}_N\,, \quad \vec{q} = \left(\sum_{k=0}^{N} q_n\, x^k \right) \in \mathbb{P}_N \quad \text{und} \quad c \in \mathbb{R}$$

wie folgt definiert sind

$$+ : \quad \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N \to \mathbb{P}_N \text{ mit } \quad \vec{p} + \vec{q} = \left(\sum_{k=0}^{N} (p_k + q_k)\, x^k \right)\,,$$

$$\cdot : \quad \mathbb{P}_N \times \mathbb{R} \to \mathbb{P}_N \quad \text{mit} \quad c \cdot \vec{p} = \left(\sum_{k=0}^{N} (c\, p_k)\, x^k \right)\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\cdot : \quad \mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N \to \mathbb{R} \text{ mit } \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \left(\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\sum_{k=0}^{N} p_k\, x^k \right) \left(\sum_{j=0}^{N} q_j\, x^j \right) \right)\,,$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum definiert.

(c) Zeigen Sie, dass die drei Polynome $\vec{b}_0 = (1)$, $\vec{b}_1 = (x)$ und $\vec{b}_2 = (x^2)$ ein Basis des Vektorraumes $\mathbb{P}_2$ bilden: Sie können für jedes Polynome $\vec{p}$ aus $\mathbb{P}_2$ reelle Zahlen x_k, $k \in \{0, 1, 2\}$ finden, so dass $\vec{p} = x_0\, \vec{b}_0 + x_1\, \vec{b}_1 + x_2\, \vec{b}_2$. Allerdings ist nun im allgemeinen $x_i \neq \vec{p} \cdot \vec{b}_i$. Woran liegt dies?
Hinweis: Sind die Basisvektoren orthonormal?

(d) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\hat{e}_0 = (1)$, $\hat{e}_1 = \sqrt{3}\,(2\,x - 1)$ und $\hat{e}_2 = \sqrt{5}\,(6\,x^2 - 6\,x + 1)$ orthonormal sind.

(e) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $\vec{p} \in \mathbb{P}_2$ mittels der Vektoren $(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2)$ darstellen lässt als

$$\vec{p} = (\vec{p} \cdot \hat{e}_0)\,\hat{e}_0 + (\vec{p} \cdot \hat{e}_1)\,\hat{e}_1 + (\vec{p} \cdot \hat{e}_2)\,\hat{e}_2\,.$$

Mithin bilden $(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_2$.

*(f) Finden Sie eine Konstante c und einen Vektor $\hat{n}_1$, so dass $\hat{n}_0 = (c\,x)$ und $\hat{n}_1$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{P}_1$ bilden.

2. Wegintegrale.

Fassen Sie die Vektorfelder als Kraft auf ein Teilchen auf

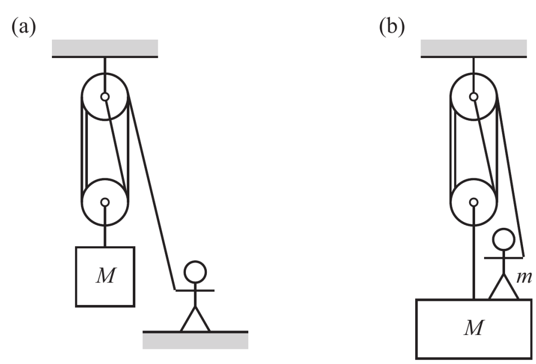
$$\vec{K}_1(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$
$$\vec{K}_2(x, y, z) = \big(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 0\big)$$

und berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um das Teilchen vom Koordinatenursprung an die Position $(1, 2, 0)$ zu bringen. Verwenden Sie dazu Linienintegrale entlang der Wege

$$C_1 :\ (t, 2t, 0) \qquad \text{und} \qquad C_2 :\ (t^3, 2t^2, 0)$$

3. Flaschenzüge.

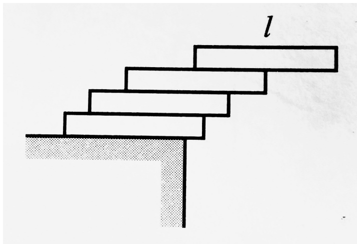
Die Skizze rechts zeigt zwei Flaschenzüge, bei denen eine Person der Masse m ein Gewicht der Masse M hält. Die Leine denken wir uns als masselos.



(a) Welche Kraft ist jeweils nötig, um das Gewicht in (a) und (b) zu halten?

(b) Die Person und das Gewicht sollen die Massen $m = 75\,\text{kg}$ und $M = 200\,\text{kg}$ haben. Welche Arbeit verrichtet die Person pro Zeiteinheit (d.h. welche Leistung), wenn sie die Leine mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 1\,\text{m/s}$ einholt?

*** 4. Bonusaufgabe: üben im Hochstapeln.**



Falls Sie zu Ostern so viele Schokoladentafeln geschenkt bekommen, dass Sie nicht wissen, was Sie damit machen können, empfehle ich folgendes Experiment:

(a) Wenn man N Schokoladentafeln der Länge L an einer Tischkante aufeinanderstapelt, um wie viel kann dann die oberste Tafel maximal über die Kante ragen, ohne das der Stapel kippt?

(b) Die Skizze links zeigt den Fall $N = 4$. Wie schaut das aber im Grenzfall $N \to \infty$ aus?

— Ich wünsche Ihnen schöne Ostertage! —