Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Jürgen Vollmer

Sommersemester 2019
Fr, 9. 4. 2019

Theoretische Mechanik und mathematische Methoden

Blatt 2. Gruppen, Vektoren, Kräfte

Mit * markierte Aufgabenteile sind Optional.

1. Eine Gruppe mit algebraischer und geometrischer Interpretation

Wir untersuchen die Menge $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ mit der Verknüpfung Multiplizieren und anschließendes Bilden der Quersumme bis man eine einstellige Zahl erhält. Zum Beispiel ist $2 \circ 7 = 5$, da das Produkt $2 \cdot 7 = 14$ ist, mit Quersumme von 5. Für größere Zahlen muss man die Quersumme gegebenenfalls mehrfach berechnen. So ist $7 \circ 8 = 2$, da das Produkt $7 \cdot 8 = 56$, mit Quersumme 11 und beim nächsten Mal ergibt sich die 2.

Wir zeigen nun, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist und diskutieren eine geometrische Darstellung.

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung kommutativ ist.

(b) Füllen Sie die Verknüpfungstabelle aus. Inwiefern hilft Ihnen die Information dabei, dass die Verknüpfung kommutativ ist?

$\circ$	1	2	4	5	7	8
1						
2					5	
4						
5						
7		5				2
8					2	

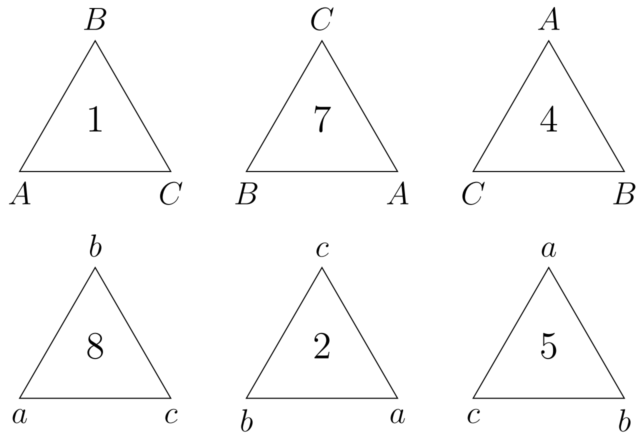
(c) Verifizieren Sie, dass die Menge M abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung $\circ$.

*(d) Kann man das auch direkt zeigen?
Hinweis: Beachten Sie an die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9.

(e) Was ist das neutrale Element der Verknüpfung?

(f) Was sind die inversen Elemente für die anderen Elemente von M?

(g) Wir ordnen die Elemente nun wie folgt graphisch an:



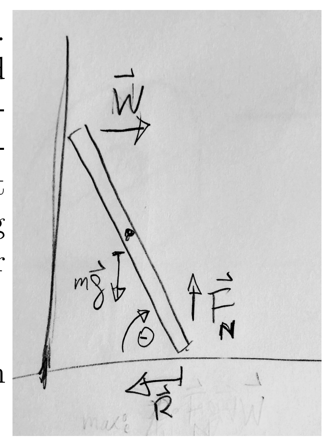
Zeigen Sie, dass das Element 7 der Drehung dieser Dreiecke um 120° entspricht und dass das Element 8 ein Wechseln der Beschriftung der Ecken von Groß- zu Kleinbuchstaben und zurück bewirkt.

(h) Wie kann man die anderen Elemente der Gruppe durch Verknüpfung von 7 und 8 ausdrücken?

*(i) Verwenden Sie die Kommutativität der Verknüpfung und die Darstellung der Gruppenelemente aus Aufgabenteil (h), um die Assoziativität zu beweisen.

2. Leiter an der Wand

Die Skizze rechts zeigt eine Leiter, die an einer Wand lehnt. Sie ist angestellt mit einem Winkel θ zur Horizontalen und es wirken folgende Kräfte: Die Schwerkraft $m\vec{g}$. Die Normalkraft $\vec{F}_N$, mit der die Leiter auf dem Boden steht. Eine Reibungskraft $\vec{R}$, die das Wegrutschen verhindert. Eine Kraft $\vec{W}$ der Wand auf die Leiter am Kontaktpunkt. Die Reibung der Leiter an der Wand vernachlässigen wir. Die Länge der Leiter sie L.



(a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit sich der Schwerpunkt der Leiter nicht bewegt?

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung dafür, dass sich die Leiter nicht dreht, geschrieben werden kann als

$$m\,g = 2\,R\,\tan\theta$$

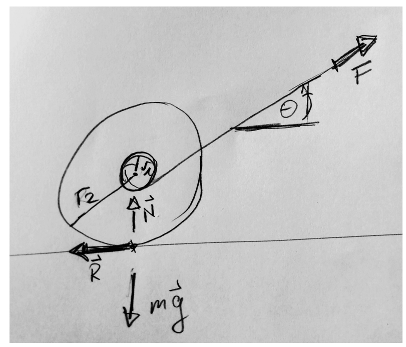
Spielt es eine Rolle, ob Drehungen bezüglich des Schwerpunktes oder der jeweiligen Enden der Leiter betrachtet?

(c) Die Leiter fängt an zu rutschen, wenn der Betrag der Reibungskraft R einen Grenzwert μF_N überschreitet. Dabei ist μ der Haftreibungskoeffizient der Leiterfüße auf dem Boden. Bei Metallfüßen auf einem Holzboden beträgt er ungefähr $\mu \simeq 2$. Was ist der minimale Anstellwinkel, bei dem die Leiter noch steht?

*(d) Warum rutscht die Leiter erst, wenn man oben steht? Was kann man dagegen unternehmen? Stimmt das überhaupt?

3. Jo-Jos spazieren führen

Die Skizze rechts zeigt ein Jo-Jo, dass auf dem Boden steht und an einem Faden gehalten wird, der einen Winkel θ zur horizontalen beschreibt. Auf das Jo-Jo wirken die Gewichtskraft $m\vec{g}$, die Normalkraft $\vec{N}$ und die Reibungskraft $\vec{R}$ am Auflagepunkt, sowie die Kraft $\vec{F}$ von der Schnur. Der Radius der Achse, auf der die Schnur aufgewickelt ist, sei r_1. Der Radius des Jo-Jo sei r_2.



(a) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit keine Kraft auf den Schwerpunkt des Jo-Jos wirkt?

(b) Für welchen Winkel θ verschwindet auch das Gesamtdrehmoment?

*(c) Machen Sie ein Experiment: Was passiert für größere Winkel θ? Was für kleinere? Was passiert, wenn Sie den Faden auf konstanter Höhe halten, und das Jo-Jo spazieren führen?
[**10 Bonus Punkte**, wenn Sie ihr Experiment mit in die Übung bringen!]