Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 4. 12. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 9. Rotierende Körper

1. Kreuzprodukte.

Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \text{Antisymmetrie}$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \text{zyklisches Vertauschen}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \text{bac-cab Regel}$$

Lösen Sie folgende Aufgaben *nur* unter Verwendung dieser Regeln, d.h. ohne je explizit ein Kreuzprodukt in Komponenten auszurechnen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(b) Zeigen Sie: Es gibt Zahlen α, β, γ, δ, so dass

$$\begin{aligned} \vec{x} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} \\ &= \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie dazu, wie sich α, β, γ, δ aus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ berechnen lassen.

(c) Wie vereinfachen sich die Ausdrücke für $\vec{x}$,
wenn zwei der vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ übereinstimmen?

(d) Es sei nun

$$y = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})\,.$$

Wie vereinfacht sich dieser Ausdruck, wenn zwei dieser Vektoren übereinstimmen? Wie vereinfacht sich das Resultat weiter, wenn auch das jeweils andere Paar übereinstimmt?

(e) Zeigen Sie insbesondere, dass sich $y = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,\sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ergibt, wenn $\vec{a} = \vec{c}$ und $\vec{b} = \vec{d}$. Hätten Sie das auch anders sehen können?

2. Coriolis-Kräfte auf dem Plattenteller.

Die Auswirkung der Coriolis-Kraft lässt sich sehr schön mittels der Bewegung einer Kugel in einer Schüssel, die auf einem Plattenteller steht beobachten. Die Masse der Kugel sei m und die Rotationsfrequenz des Plattenspielers Ω. Die Schale ist zylindersymmetrisch mit Höhenprofil $z(r)$. Sie wird so auf den Plattenteller gestellt, dass r der Abstand von der Rotationsachse ist. Reibung und Rollen der Kugel werden in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.

(a) Skizzieren Sie den Aufbau.

(b) Die Schale sei ein Rotationsparaboloid, $z(r) = a + b\,r^2$. Wie muss man Ω wählen, damit die Schwerkraft und die Zentripetalkraft sich exakt aufheben?

(c) Wir betrachten die Bewegung der Kugel aus der Perspektive eines ruhenden Betrachters, der von außen auf den Plattenspieler schaut. Die Position der Kugel beschreiben wir durch die komplexe Zahl $z(t)$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Bewegungsgleichung dann geschrieben werden kann als

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\phi)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\,, \qquad \text{mit} \quad \theta, \phi, A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Lösungen Ellipsenform haben.
Wie stehen die Parameter der Ellipse in Beziehung zu θ, ϕ, A, B?

(d) Wir betrachten die Bewegung der Kugel aus der Perspektive einer Kamera, die von oben auf den Plattenteller schaut und mitrotiert. Die Position der Kugel beschreiben wir durch die komplexe Zahl $q(t)$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung dann geschrieben werden kann als

$$\frac{\delta^2 \vec{q}(t)}{\delta t^2} = -2\Omega\,\mathrm{i}\,\frac{\delta \vec{q}(t)}{\delta t}\,.$$

Bestimmen Sie die Lösung dieser Gleichung.

(e) Die Kugel wird zu Anfang mit Geschwindigkeit $\dot{z}(t_0) = 0$ losgelassen an der Position $z(t) = R \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die resultierenden Lösungen $z(t)$ und $q(t)$. Wie hängen die Lösungen zusammen?

3. Bälle werfen, Diskuswurf und Münzen flippen.

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass die Schwerpunktbewegung und die Rotation eines Körpers für einen kräftefreien freien Flug entkoppeln. Zu jedem Zeitpunkt des Fluges lassen sich der Drehimpuls $\vec{L}$ des Körpers und seine Drehachse $\vec{\Omega}$ dann schreiben als

$$\vec{L} = \sum_\alpha \omega_\alpha(t)\, I_\alpha\, \hat{e}_\alpha(t)\,, \qquad \vec{\Omega}(t) = \sum_\alpha \omega_\alpha(t)\, \hat{e}_\alpha(t) \quad \text{mit} \quad \omega_\alpha(t) = \vec{\Omega}(t)\cdot\hat{e}_\alpha(t)\,.$$

Dabei sind die Hauptträgheitsmomente I_α die Eigenvektoren der Trägheitsmatrix

$$I_{ij} = -\int \mathrm{d}^3q\,\rho(\vec{q})\,q_i\,q_j + \delta_{ij}\int \mathrm{d}^3q\,\rho(\vec{q})\,(\vec{q}\cdot\vec{q})$$

und $\hat{e}_\alpha$ die korrespondierenden Eigenvektoren. Diese Richtungen rotieren mit dem Körper und der Koordinatenursprung für die Vektoren $\vec{q}$ ist der Schwerpunkt des Körpers. Es gilt die Euler-Gleichung für freie Rotation,[1]

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\,\omega_3\,\frac{I_3 - I_2}{I_1}\,.$$

Die Euler-Gleichungen für ω_2 und ω_3 sehen genauso aus, bis auf zyklische Permutation der Indices.

(a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente für die Kugel (Hinweis: Kugelkoordinaten!) und lösen Sie die resultierenden Euler-Gleichungen. Interpretieren Sie das Resultat in Hinblick auf die Rotation eines Fußballs während des Fluges.

(b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente eines Zylinders mit Radius R und Höhe H (Hinweis: Zylinderkoordinaten!). Wir wählen $I_1 = I_2 = I$ und I_3 ist das Hauptträgheitsmoment für die Rotation um die Zylinderachse.

(c) Ein möglichst ruhiger Wurf gelingt beim Diskuswerfen für großes ω_3 und $\omega_2 = \omega_1 = 0$. Zeigen Sie, dass dies ein Fixpunkt der Bewegungsgleichungen ist. Wenn der Wurf nicht gut gelingt „wobbelt“ der Diskus: ω_1 oder ω_2 waren dann beim Abwurf verschieden von Null. Wie sieht die Lösung der Eulergleichungen dann aus? Wie korrespondiert dies mit dem „Wobbeln“?

(d) Eine Scheibe kann man auch anders werfen, wie man beim Münzen flippen unschwer erkennt. Welcher Anfangsbedingung entspricht dies? Wie sieht die Lösung aus?

Bonus. Heute etwas zum Lesen anstatt zum Rechnen:

(a) Rigid-body dynamics of a football
Peter J. Brancazio
`https://doi.org/10.1119/1.15123`

(b) The right spin: how to fly a broken space craft
von Michael Foale und Robert Osserman
`https://plus.maths.org/content/right-spin-how-fly-broken-space-craft`

[1] Die Gleichung folgt unmittelbar aus $\vec{0} = \dot{\vec{L}} = \frac{\delta L}{\delta t} + \vec{\Omega}(t) \times \vec{L}$ und den oben gegebenen Darstellungen von $\vec{L}$ und $\vec{\Omega}(t)$. Mehr dazu am Mittwoch in der Vorlesung.