Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 26. 11. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 8. Rotation und Coriolis-Kräfte

1. Rotation in 2 Dimensionen.

In zwei Dimensionen lässt sich eine Rotation um den Winkel α bezüglich des Ursprungs darstellen als Multiplikation des Ortsvektors $\vec{q}$ mit der Drehmatrix

$$\mathcal{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}(\alpha)\,\mathcal{D}(\beta) = \mathcal{D}(\alpha+\beta)$.

(b) Zeigen Sie, dass Salarprodukte $\vec{a}\cdot\vec{b}$ invariant sind unter Rotationen:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\mathcal{D}(\theta)\,\vec{a})\cdot(\mathcal{D}(\theta)\,\vec{b})$$

Mithin ist auch die Länge von Vektoren invariant.
Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (a).

(c) Zeigen Sie, dass der Betrag von Kreuzprodukten $|\vec{a}\times\vec{b}|$ invariant ist unter Rotationen.
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Spatprodukt invariant ist unter zyklischer Permutation, $\vec{x}_1\cdot(\vec{x}_2\times\vec{x}_3) = \vec{x}_2\cdot(\vec{x}_3\times\vec{x}_1) = \vec{x}_3\cdot(\vec{x}_1\times\vec{x}_2)$.

(d) In der Ebene können die Koordinaten (x, y) auch aufgefasst werden als komplexe Zahlen $x + \mathrm{i}\,y$. Welche Operation beschreibt eine Rotation um α in der komplexen Ebene? Wie kann dies die Nachweise in (a) und (b) erleichtern?

2. Rotation in 3 Dimensionen.

In drei Dimensionen gibt es drei unabhängige Rotationsachsen durch den Ursprung. Eine Rotation um den Winkel α, die die dritte Koordinatenrichtung nicht ändert, lässt sich darstellen als Multiplikation des Ortsvektors $\vec{q}$ mit der Drehmatrix

$$\mathcal{D}(\hat{3},\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Die Rotationsmatrizen für Rotationen bezüglich der anderen Koordinatenachsen erhält man durch zyklische Permutation der Achsen. Sie lassen sich also generieren durch die Transformationsmatrix

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wie wirkt die Transformation $\mathcal{Z}$ auf die Einheitsvektoren $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\hat{e}_3 = (0, 0, 1)$? Wie auf die Drehmatrix $\mathcal{D}(\hat{3}, \alpha)$?

(b) In drei Dimensionen kommutieren Drehungen nicht mehr. Verifizieren Sie dies anhand eines Beispiels.

(c) Beweisen Sie: Die Rotation um einen Winkel α bezüglich einer beliebigen Achse, gegeben in Polarkoordinaten (θ, ϕ), lässt sich schreiben als Produkt von drei Transformationen:
1. Drehung der Achse (θ, ϕ) in die Vertikale.
2. Drehung um den Winkel α um die Senkrechte.
3. Zurückdrehen der Vertikalen nach (θ, ϕ).

(c) Wir wählen ein Koordinatensystem, bei dem $\hat{x}$ nach rechts zeigt, $\hat{y}$ nach hinten und $\hat{z}$ nach oben. Ein Würfel liegt mit seinem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems, die Eins schaut nach vorne, die Zwei nach oben. Bestimmen Sie die Drehmatrizen, die den Würfel in folgende Konfigurationen überführen
1. Sechs oben und Fünf vorne.
2. Sechs vorne und Drei oben.
3. Die Ecke Eins-Zwei-Drei schaut senkrecht nach oben und die Kante Eins-Drei liegt in der y, z-Ebene.

3. Foucaultsches Pendel.

Ein Fandenpendel der Länge l wird im konstanten Schwerefeld (Fallbeschleunigung $-g\hat{z}$) aufgehängt, so dass es frei in der horizontalen (x, y)-Ebene schwingen kann. Zu Beginn wird es ein wenig ausgelenkt, so dass die Auslenkung klein ist gegenüber der Pendellänge l. Dann wird es losgelassen.

(a) Wir nehmen an das Pendel befinde sich in einem Inertialsystem. Zeigen sie das sich die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$
$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y$$

für die Auslenkung des Pendels x und y über dem Boden ergeben.

(b) Das Pendel sei nun an einem relativ zur Erdoberfläche ruhenden Punkt bei der geographischen Breite β aufgehängt. Die Erde rotiert mit eine Kreisfrequenz Ω. Zeigen Sie, dass sich nun näherungsweise folgende Bewegungsgleichungen ergeben,

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\Omega\,\dot{y}\,\sin\beta$$
$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\Omega\,\dot{x}\,\sin\beta$$

Welche Beiträge zur Bewegungsgleichung wurden hier vernachlässigt? Warum ist dies erlaubt?

(c) Überführen Sie die beiden Gleichungen in eine einzige, indem Sie die komplexe Variable $z = x + \mathrm{i}\,y$ einführen. Lösen Sie die Gleichung mit dem Ansatz $z = A\,\exp(pt)$.

(d) Zeigen sie, dass die gewonnene Lösung ein Pendel beschreibt, dessen Schwingungsebene rotiert und bestimmen Sie die Rotationsfrequenz.

Bonus. Windsysteme.

Auf der Erde wird der gemittelte horizontale Wind auf Längenskalen von mehr als 100 km maßgeblich von der Corioliskraft beeinflusst.

(a) Warme Luft steigt am Äquator der Erde auf und strömt in Richtung der Pole, während, am Boden kühlere Luft zurück zum Äquator strömt. Diese mittlere Strömung wird abgelenkt durch die Corioliskraft und verursacht die sogenannten Passsatwinde. In welcher Richtung treffen die Winde von Norden und Süden kommend am Äquator ein?

(b) Geschwindigkeit und Richtung der Strömung ändern sich nicht mehr, wenn sich ein Druckgefälle aufbaut und die dadurch bedingten Kräfte die Corioliskraft kompensieren (geostrophischer Wind). Wir verwenden die Euler-Gleichung für die Impuls-Bilanz der Flüssigkeit, um diese Beziehung zu untersuchen,

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -\nabla P\,.$$

In dieser Gleichung ist ρ die Massendichte des Fluids, $\vec{u}$ die Geschwindigkeit eines kleinen Fluid-Volumens und P der Druck. Die Gleichung gilt in Inertialsystemen und wenn die Viskosität des Fluids vernachlässigt werden kann. Dies ist für die gemittelten Windgeschwindigkeiten gegeben. Welche zusätzlichen Beiträge muss man aber hinzufügen, um die Corioliskraft zu berücksichtigen?

Zeigen Sie, dass eine stationäre Strömung mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ dann ein Druckgefälle

$$\nabla P = -2\,\rho\,\vec{\Omega}\times\vec{u}$$

bedingt. Dabei ist Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

(c) Berechnen Sie die Druckdifferenz in mbar, die sich über eine Distanz von $1000\,\mathrm{km}$ aufbaut, wenn die Luft mit einer Geschwindigkeit von $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ strömt. Wie hängt die Druckdifferenz vom Breitengrad ab? Welche Beziehung besteht zwischen den Richtungen der Druckdifferenz und der Strömungsgeschwindigkeit?
Hinweis: Die Dichte der Luft ist $\rho \simeq 1.3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

(d) Betrachten Sie nun eine Strömung entlang des Äquators. Wie ändert sich der Druck bei einer Strömung nach Westen? Wie bei Strömung nach Osten? Was sagt dies über die Stabilität des Windes? Warum ist dieses Argument bestenfalls unvollständig und schlimmstenfalls falsch?

(e) Hochdruck- und Tiefdruckgebiete auf mittleren Breitengraden (also z.B. Europa) haben einen typische Durchmesser von $1000\,\mathrm{km}$. Die Luft strömt eher entlang der Isobaren als entlang des Druckgradienten. Diskutieren Sie die unterschiedliche Orientierung der Strömungen um Hochdruck- und Tiefdruckgebiete. Vergleichen sie die in (c) berechnete Druckdifferenz mit typischen Druckdifferenzen zwischen Hochdruck- und Tiefdruckgebieten.