Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 19. 11. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 7. Bewegungsintegrale und Symmetrien

1. Diskrete Symmetrien von Bewegungsgleichungen.

Wir hatten in der Vorlesung ausführlich die Folgen von kontinuierlichen Symmetrien der Bewegungsgleichungen (z.B. Translation, Rotation) untersucht. Nun diskutieren wir noch zwei diskrete Symmetrien. Dazu betrachten wir ein System von N Teilchen an den Positionen $\vec{Q} = \{\vec{q}_i(t)\}_{i=1,\ldots,N}$ mit Geschwindigkeiten $\dot{\vec{Q}} = \{\vec{q}_i(t)\}_{i=1,\ldots,N}$ und

$$\text{kinetischer Energie: } T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \, |\dot{\vec{q}}_i(t)|^2 \,, \qquad \text{potentieller Energie: } V = V(\vec{Q}) \,.$$

(a) Zeitumkehr τ bildet eine Trajektorie ab auf die rückwärts in der Zeit verlaufende Bahn. (Dies entspricht der Bewegung, die man sieht, wenn man einen Film ab dem Zeitpunkt t_I rückwärts laufen lässt.) Es gilt dann

$$\tau : \vec{q}_i(t) \to \vec{q}_i(t_I - t) \quad \text{für} \ \ i = 1, \ldots, N \,.$$

Was geschieht mit den Geschwindigkeiten?
Zeigen Sie dass die Wirkung S für eine Trajektorie $(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}})$ von der Zeit t_0 bis t_1 genau denselben Wert annimmt, wie für die zeitinvertierte Trajektorie, die am Endpunkt $\vec{Q}(t_1)$ beginnt, dieselben Punkte in umgekehrter Reihenfolge durchläuft und nach einem Zeitintervall $t_1 - t_0$ am Anfangspunkt $\vec{Q}(t_0)$ der ursprünglichen Trajektorie endet.
Wenn die Wirkung für eine Trajektorie extremal ist, so ist sie dies mithin auch für die zeitumgekehrte Trajektorie! Systeme mit dieser Eigenschaft heißen *zeitumkehrinvariant*. Welche Eigenschaften haben wir hier verwendet, um Zeitumkehrinvarianz nachzuweisen?

(b) Eine Spiegelung auf dem Phasenraum $\mathcal{T}$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &: (\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}) \mapsto (\mathcal{T}_1(\vec{Q}), \mathcal{T}_2(\dot{\vec{Q}})) \\ \text{mit} \quad \mathcal{T} &: (\mathcal{T}_1(\vec{Q}), \mathcal{T}_2(\dot{\vec{Q}})) \mapsto (\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}) \end{aligned}$$

bei der zweimal spiegeln jeden Punkt zurück auf die Ausgangsposition bringt (d.h. $\mathcal{T}$ ist eine Involution auf dem Phasenraum).
Unter welcher Bedingung an V bildet eine Spiegelung die Lösungen der Bewegungsgleichung wiederum auf eine Lösung ab?
Geben Sie zwei physikalische Beispiele für Systeme mit einer Spiegelsymmetrie. (Bitte unterschiedliche Symmetrien!)

2. Mechanische Ähnlichkeit.

Zwei Lösungen der Bewegungsgleichung heißen ähnlich, wenn man sie durch geeignete Skalierung der Zeit-, Längen- und Massen-Skala aufeinander abbilden kann. Skalierte Größen kennzeichnen wir durch einen Akzent und die Skalenfaktoren nennen wir λ, τ und μ,

$$t' = \tau\, t\,, \qquad \vec{q}_i{}' = \lambda\, \vec{q}_i\,, \qquad m_i' = \mu\, m_i\,.$$

(a) Es sei wiederum $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i |\dot{q}_i|^2$. Nun untersuchen wir potentielle Energien, die wie folgt unter Reskalieren der Längen und Massen skalieren

$$V' = \mu^\alpha\, \lambda^\beta\, V$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen invariant sind, wenn man die Zeit mit folgendem Faktor skaliert

$$\tau = \mu^{(1-\alpha)/2}\, \lambda^{(2-\beta)/2}\,.$$

(b) Betrachten Sie nun zwei mathematische Pendel, $V = mgz$, mit unterschiedlichen Massen und Längen der Pendelarme. Welche Werte λ, τ und μ beschreiben die Bahnen? Wie stehen ihre Perioden der beiden Pendel dann also in Beziehung zu den Verhältnissen der Massen und Längen der Pendelarme? Welche Skalierung erwarten Sie aufgrund einer Dimensionsanalyse?

(c) Was ergibt sich für die Perioden von zwei Federpendeln, $V = k|\vec{q}|^2/2$?

(d) Diskutieren Sie die Perioden der Planetenbahnen im Keplerproblem, $V = mMG/|\vec{q}|$. In diesem Falle ist die Analyse trickreich, da die Massen der Sonne *und* der Planeten auftreten. Wieso spielen dann die unterschiedlichen Massen der Planeten keine Rolle beim dritten Keplerschen Gesetz?

3. Symmetrien und Erhaltungsgrößen.

Wir betrachten eine Kugel, die auf eine Bahn mit Höhenprofil $h(x)$ rollt, die ihrerseits reibungsfrei in Bewegungsrichtung bewegt werden kann. Die Masse der Kugel sei m und die der Bahn M. Die Kugel wird zur Zeit t_0 in Ruhe auf einer Höhe H der Bahn gestartet. Zur Zeit t sie an der Position $x(t)$. Wenn die Kugel rollt, übt sie eine Kraft auf die Bahn aus, so dass diese auch in Bewegung gesetzt wird. Die Position der Bahn bezeichnen wir als $x_B(t)$.

(a) Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Welche Symmetrien hat das Problem. Welche Größen sind mithin erhalten? (Bitte begründen Sie ihre Antwort!)

(c) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und bestimmen sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $x_B(t)$. Verifizieren Sie, dass die in (b) gefundenen Bewegungsintegrale zeitinvariant sind.

(d) Es sei im Folgenden $h(x) = a\, x^2/2$. Lösen Sie die Bewegungsgleichung! Die Bahn $x(t)$ wird beschrieben durch eine Sinus-Schwingung. Wie hängt die Amplitude und die Frequenz von den Massen m und M ab? Diskutieren Sie, was in den Grenzfällen $m \gg M$ und $m \ll M$ geschieht.

Bonus. Vertiefung Variationsrechnung: Riesenseifenhaut.

© Mathematikum Gießen
http://mathematikum.df-kunde.de/Wanderausstellung/index.php?m=2&la=de&id=314

Eine Seifenhaut, die zwischen zwei Ringen aufgespannt wird, nimmt eine Form mit minimaler Oberfläche an. Wir betrachten die Form zylindersymmetrischer Seifenhäute, die zwischen Ringen des Radius R_0 und R_1 an den vertikalen Positionen x_0 und x_1 aufgespannt wird. Ein hübsches Experiment, bei dem man sehen kann was passiert, steht im Mathematikum in Gießen (siehe Bild). x_0 bezeichnet dann die Position der Seifenschale neben der Platte, auf der die Kinder stehen. x_1 ist die Höhe des Ringes, der mit einem Seil aus der Schale hochgezogen wird.

(a) Wir betrachten zylindersymmetrische Seifenhäute mit Radius $w(x)$ an der Position x. Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass die Oberfläche A der Seifenhaut ein Integral der folgenden Form ist

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\, w(x)\, f(w'(x))\,,$$

wobei $f(w'(x))$ berücksichtigt, dass die Fläche größer wird, wenn die Ableitung $w'(x) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}x$ zunimmt. Welche Funktion $f(w'(x))$ muss man hier verwenden?

(c) Zeigen Sie, dass A extremal ist für Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$w''(x) = \frac{1 + (w'(x))^2}{w(x)}\,.$$

(d) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung.
Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung dazu in der Form

$$\frac{w'(x)\, w''(x)}{1 + (w'(x))^2} = \frac{w'(x)}{w(x)} .$$

(e) Wir suchen nun konkrete Lösungen für $-x_0 = x_1 = a$ und $R_0 = R_1 = R$. Die Breite der Lösung an der schmalsten Stelle sei w_0. Zeigen Sie, dass die Breite folgender Gleichung genügt

$$\frac{R}{a} = \frac{w_0}{a} \cosh \frac{a}{w_0} .$$

Skizzieren Sie R/a als Funktion von a/w_0. Für gegebenes R und a können Sie nun w_0 graphisch bestimmen. Wenn die beiden Ringe hinreichend dicht zusammen sind, sollten Sie zwei Lösungen finden. Was passiert, wenn man den Ringe langsam hochzieht? Wird es einem Erwachsenen gelingen den Ring bis zur Kopfhöhe zu ziehen, bevor der Seifenfilm reißt?