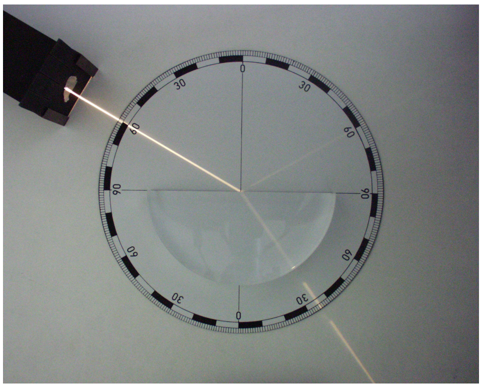
Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 12. 11. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 6. Variationsrechnung und Lagrange

1. Brechung von Licht.



© Zátonyi Sándor (ifj.) Fizped (talk) CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2845439

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht denjenigen Weg wählt, für den die Laufzeit extremal wird. Beim Eintritt von Luft in Glas ändert sich die Richtung entsprechend dem Brechungsgesetz von Snellius. Wir definieren den Punkt, an dem der Strahl oben links in der Luft „losläuft" als Ursprung, $(x, y) = (0, 0)$, legen die Richtungen $\hat{x}$ nach unten und $\hat{y}$ nach rechts in dem Bild, und legen fest, dass der Strahl durch die Position (b, w) im Glas laufen soll. Der Weg des Lichtes sei durch die Funktion $y(x)$ beschrieben. Die Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Glas nennen wir c_L und c_G. Der Übertritt von Luft zum Glas liege an der Position (a, u).

(a) Zeigen Sie, dass die Laufzeit T des Lichtes für eine (hypothetische!) Bahn $y(x)$ mit Ableitungen $y'(x)$ wie folgt berechnet werden kann,

$$T = c_L^{-1} \int_0^a \mathrm{d}x \, \sqrt{1 + (y'(x))^2} + c_G^{-1} \int_a^b \mathrm{d}x \, \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, .$$

(b) Bestimmen Sie δT für eine Variation der Bahn $y(x) + \delta y(x)$. Wir wissen, wo die Oberfläche des Glases ist–nicht wo der Strahl von der Luft in das Glas eintritt. Welche Einschränkungen bedeutet diese für $\delta y(x)|_{x=0}$, $\delta y(x)|_{x=a}$ und $\delta y(x)|_{x=b}$? Was passiert dann also mit den Randtermen bei der partiellen Integration?

(c) Zeigen Sie dass der Strahl in der Luft und im Glas jeweils gerade verlaufen muss. Zeigen Sie, dass somit

$$T(u) = \frac{1}{c_L} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{c_G} \sqrt{(w - u)^2 + (b - a)^2} \, .$$

Leiten Sie das Brechungsgesetz von Snellius aus der Bedingung $0 = \mathrm{d}T(u)/\mathrm{d}u$ her.

Bonus (d) Das Snelliussche Gesetz folgt auch unmittelbar aus dem Fermatschen Variationsprinzip. Wie?

2. Zwei Massen am Gummiband.

Zwei Teilchen derselben Masse m sind mit einem Gummiband verbunden, dass über einer reibungsfreien Rolle hängt. Die Teilchen befinden sich auf vertikaler Höhe h_1 und h_2.

(a) Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Wir beschreiben das Problem mithilfe der Koordinaten $H = h_1 + h_2$ und $D = h_1 - h_2$. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten die folgende Gestalt annimmt,

$$\mathcal{L}(H, D, \dot{H}, \dot{D}) = \frac{\mu}{2}\left(\dot{H}^2 + \dot{D}^2\right) - m\,g\,H - \frac{k}{2}H^2\,.$$

Hier ist k das Elastizitätsmodul des Gummibandes und μ ist eine effektive Masse. Wie hängt μ mit m zusammen? Die Gleichung verwendet eine spezielle Wahl des Ursprungs für die Höhen h_1 und h_2. Welche?

(c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für H und für D.

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und interpretieren Sie das Resultat.

3. Sphärisches Pendel.

Bei einem sphärischen Pendel wird eine große Masse M im Schwerefeld der Erde an einem langen Seil L (mit zu vernachlässigender Masse im Vergleich zu M) aufgehängt, so dass es frei in zwei Richtungen schwingen kann. Wir wählen den Aufhängepunkt als Ursprung des Koordinatensystems und beschreiben die Position der Masse mittels Kugelkoordinaten

$$\hat{r}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix}\sin\theta\,\cos\phi\\ \sin\theta\,\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\,,\quad \hat{\theta}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix}\cos\theta\,\cos\phi\\ \cos\theta\,\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\,,\quad \hat{\phi}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

Damit entspricht die Bewegung des Pendels einer reibungsfreien Bewegung auf einer Kugeloberfläche unter dem Einfluss von Gravitation.

(a) Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.

(c) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$.
Beweisen oder zeigen Sie: aufgrund der Rotationsinvarianz um die vertikale Achse ist der (entdimensionalisierte) Drehimpuls $L_z = \dot{\phi}\,\sin^2\theta$ erhalten.

(d) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$. Verwenden Sie das Resultat aus (c), um $\dot{\phi}$ in der Bewegungsgleichung zu eliminieren. Unter Verwendung des Bewegungsintegrals L_z haben wir separate Bewegungsgleichungen für die Zeitentwicklung der Koordinaten $\phi(t)$ und $\theta(t)$ gefunden!

(e) Multiplizieren Sie das Resultat mit $\dot{\theta}$, um zu zeigen, dass folgender Ausdruck eine Integral der Bewegung ist

$$E_{\text{eff}} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \cos\theta + \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}\,.$$

Welche Beziehung besteht zwischen λ und L_z?
Welche dimensionslose Zeit wird hier verwendet?

Bonus (f) Zeichnen Sie die Trajektorien $(\theta(t), \dot{\theta}(t)$ im Phasenraum für die θ-Bewegung. Bestimmen Sie den Fixpunkt und seine Stabilität (durch Hinschauen, nicht Rechnen!). Wie sehen die Lösungen $\theta(t)$ (qualitativ!) aus? Was bedeutet dies für die Bewegung $(\theta(t), \phi(t))$ auf der Kugelschale?

Bonus. Kürzester Weg auf einer Kugel.

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten (wie in Aufgabe 3) lässt sich ein infinitesimales Längenelement $\mathrm{d}\ell$ entlang eines Weges auf der Kugeloberfläche schreiben als

$$\mathrm{d}\ell = R\,\mathrm{d}\theta + R\,\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,.$$

Wir untersuchen die Länge von Wegen, die durch Funktionen $\theta(\phi)$, bzw. $\phi(\theta)$ beschrieben werden.
Anmerkung: Für einen gegebenen Weg ist also $\theta(\phi)$ die Umkehrfunktion von $\phi(\theta)$.

(a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit unserer Diskussion setzen wir $R = 1$. Wieso ist dies zulässig?

(b) Zeigen Sie, dass die Länge L eines Weges von (θ_a, ϕ_a) nach (θ_e, ϕ_e) dann gegeben ist durch

$$\begin{aligned} L = \int \mathrm{d}\ell &= \int_{\phi_a}^{\phi_e} \mathrm{d}\phi\,\sqrt{\sin^2\theta(\phi) + \left(\frac{\mathrm{d}\theta(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right)^2} \\ &= \int_{\theta_a}^{\theta_e} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{1 + \sin^2\theta\,\left(\frac{\mathrm{d}\phi(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \end{aligned}$$

Wieso ist dies dieselbe Länge?

(c) Eine notwendige Bedingung dafür, dass L minimal ist, ist dass die Variation δL der in (b) definierten Integrale verschwindet. Betrachten Sie den infinitesimal veränderten (d.h. variierten) Weg $\theta(\phi) + \delta\theta(\phi)$ führen Sie die Variation des ersten Integrales aus, und bestimmen Sie so die Differentialgleichung für $\theta(\phi)$ der Wege mit extremaler Länge genügen müssen.

(d) Betrachten Sie den infinitesimal veränderten (d.h. variierten) Weg $\phi(\theta) + \delta\phi(\theta)$ führen Sie die Variation des zweiten Integrales aus, und bestimmen Sie so die Differentialgleichung für $\phi(\theta)$ der Wege mit extremaler Länge genügen müssen. Welche der beiden Gleichungen ist einfacher zu lösen? Wie hätten Sie das sehen können, *bevor* Sie die Rechnungen ausführen?

(e) Das Resultat aus (d) kann unmittelbar einmal integriert werden. Zeigen Sie, dass dies auf folgende Differentialgleichung erster Ordnung führt

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\theta} \left[\sin^2\alpha - \cos^2\theta\right]^{-1/2} .$$

Dabei ist $\sin\alpha$ die Integrationskonstante, die sich bei der Integration ergeben hat.

(f) Verifizieren Sie, dass die folgende Funktion eine Lösungen der in (e) gefundenen Differentialgleichung ist

$$\sin\phi = -\frac{\cos\alpha\ \cos\theta}{\sin\alpha\ \sin\theta} .$$

Die Lösung hat keine Integrationskonstante! Wie sieht die allgemeine Lösung aus? Was sagt uns diese Lösung über den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf der Kugel?