Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 5. 11. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 5. Lagrange-Formalismus 1

1. Teilchen in rotationssymmetrischen Potentialen.

Ein Testteilchen der Masse m und der Position $\vec{q}(t)$ bewege sich unter dem Einfluss eines rotationssymmetrischen Potentials $\Phi(|\vec{q}|)$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und ermitteln sie daraus die Bewegungsgleichung.

Ermitteln Sie nun für folgende Spezialfälle die Bewegungsgleichungen. Vergleichen Sie ggf. das Resultat mit Bewegungsgleichungen, die wir schon kennen. Was wird hier jeweils beschrieben?

(b) Es sei $\Phi(|\vec{q}|) = -m\, M\, G/|\vec{q}\,|$.

(c) Es sei $\Phi(|\vec{q}|) = k\,|\vec{q}\,|^2/2$.

(d) Es sei $\Phi(|\vec{q}|) = k\,\left(|\vec{q}\,| - l\right)^2/2$.

2. Eine pendelnde Feder.

Ein Teilchen der Masse m ist mit einer Feder der Federkonstante k an einem Haken befestigt (potentiellen Energie $E = k(R-L)^2/2$), so dass es im Gravitationsfeld nach rechts und links pendeln kann (dies ergibt einen weiteren Beitrag zur potentiellen Energie). In Polarkoordinaten schreiben wir die Position des Teilchens als $\vec{q}(t) = R(t)\,\hat{r}(\theta(t))$.

(a) Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Teilchens.

(c) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen für θ und R mittels des Lagrange-Formalismus.

(d) Was ergibt sich im Falle $g = 0$? Diskutieren Sie die Beziehung zu dem Resultat aus Aufgabe 1(d).
Hinweis: Untersuchen Sie $\ddot{\vec{q}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(R(t)\,\hat{r}(\theta(t))\right)$.

(e) Was passiert, wenn R eine konstante Länge behalten soll? Für $\ddot{\theta}$ sollten Sie dann die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels erhalten. Verwenden Sie die Energieerhaltung dieses Pendels, um $\dot{\theta}$ in der Gleichung für $\ddot{R}$ zu eliminieren. Dies sollte auf eine Gleichung folgender Form führen

$$\ddot{R} = \frac{a}{R} + b\,R + c + d\,\cos\theta\,.$$

Wie hängen $a, \cdots, d$ von m, g, k und der Energie E des mathematischen Pendels ab? Warum kann $\dot{R} = 0$ keine Lösung dieser Gleichung sein? Unter welchen (physikalischen!) Bedingungen kann ein mathematisches Pendel dann ein sinnvolles Modell sein?

3. Doppelpendel.

In der Vorlesung habe ich ein Doppelpendel gezeigt. Ein Gewicht der Masse m_1 ist mit einem Arm der Länge L_1 an der Stange befestigt. Ein weiteres Gewicht ist mit einem Arm der Länge L_2 am ersten Gewicht befestigt. Das zweite Gewicht hat Masse m_2. Wir vernachlässigen Reibung und die Masse der Arme. Wir wählen kartesischen Koordinaten, so dass die Positionen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der beiden Gewichte folgende Form haben

$$\begin{aligned}
x_1 &= L_1\,\sin\theta_1\,,\\
y_1 &= -L_1\,\cos\theta_1\,,\\
x_2 &= L_1\,\sin\theta_1 + L_2\,\sin\theta_2\,,\\
y_2 &= -L_1\,\cos\theta_1 - L_2\,\cos\theta_2\,.
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.

(b) Das Pendel hat zwei Freiheitsgrade: wir können die Konfiguration mit den Winkeln (θ_1, θ_2) vollständig beschreiben. Bestimmen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Doppelpendels als Funktion von $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$.

(c) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen für θ_1 und θ_2 mittels des Lagrange-Formalismus.

(d) Die Gleichungen werden (nun ja: etwas) übersichtlicher, wenn man die Zeit mit $\omega = \sqrt{g/L_1}$ reskaliert, und die Gleichungen mit Konstanten durchmultipliziert, so dass sie nur noch von den dimensionslosen Parametern $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ und $\lambda = L_2/L_1$ abhängen. Zeigen Sie, dass sich dann folgende Bewegungsgleichungen ergeben

$$\ddot{\theta}_1 + \mu\,\lambda\,\ddot{\theta}_2\,\cos(\theta_2 - \theta_1) = \mu\,\lambda\,\dot{\theta}_2^2\,\sin(\theta_2 - \theta_1)\; - \sin\theta_1$$

$$\lambda\,\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\,\cos(\theta_2 - \theta_1) = -\dot{\theta}_1^2\,\sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin\theta_2$$

Bonus. Der Fliehkraftregler.

In der dritten Aufgabe von Blatt 3 hatten wir den Fliehkraftregler behandelt. Mithilfe des Lagrange-Formalismus haben wir in der Vorlesung gesehen, dass die Auslenkung der Kugeln (ohne Reibung!) durch die folgende Bewegungsgleichung beschrieben wird

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta\ \left[1 - \rho^2 \cos\theta\right]$$

Dabei wurde ω in der Zeit absorbiert und $\rho = \Omega/\omega$.

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung folgende Bewegungskonstante hat

$$K = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \Phi(\theta) \qquad \text{mit} \quad \Phi(\theta) = -\cos\theta + \frac{\rho^2}{2}\cos^2\theta$$

(b) $\Phi(\theta)$ ist ein *effektives* Potential der Bewegung. Skizzieren Sie $\Phi(\theta)$ für $\rho < 1$ und $\rho > 1$. Wie verändert sich die Bewegung, wenn der Fliehkraftregler schneller rotiert als ω?

(c) Zeigen Sie: Für alle ρ hat die Bewegungsgleichung Fixpunkte für $\theta_u = 0$ und $\theta_o = \pi$. („u“ wie unten und „o“ wie oben). Außerdem gibt es für $\rho > 1$ einen weiteren Fixpunkt θ_c. Bestimmen Sie die Parameterabhängigkeit $\theta_c(\rho)$.

(d) Zeigen Sie,

1. θ_o ist immer ein Sattel,
2. für $0 < \rho < 1$ ist θ_u ist ein neutraler Fokus und für $\rho > 1$ ein Sattel,
3. $\pm\theta_c$ ist ein neutraler Fokus, wenn der Fixpunkt existiert.

(e) Bestimmen Sie die Homoclinen und Heteroclinen. Zeichnen Sie dann das Phasenportrait.

(f) Was verändert sich in Anwesenheit schwacher Dämpfung?