Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 29. 10. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 4. Zentralkräfte

1. Kritische Dämpfung im Phasenportrait.

Wir betrachten einen gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 \, z(t) - 2\,\gamma\,\dot{z}(t)\,.$$

Dabei ist $\gamma \geq 0\,\mathrm{s}^{-1}$ die Dämpfung des Oszillators und ω die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators (d.h. für $\gamma = 0\,\mathrm{s}^{-1}$).

(a) Absorbieren Sie ω in die Zeit und führen Sie eine geeignete dimensionslose Konstante D ein, so dass

$$0 = \ddot{z}(\tau) + 2\,D\,\dot{z}(\tau) + z(\tau)\,.$$

Die positive reelle Konstante D heißt Dämpfungsgrad.

(b) Zeigen Sie, dass bei $z = 0$ ein stabiler Fokus vorliegt, wenn $0 \leq D < 1$ und eine Senke (d.h. zwei negative Eigenwerte, wenn $D > 1$.

(c) Der Fall $D = 1$ heißt kritische Dämpfung. Zeigen Sie, dass $z_1(\tau) = z_0\,\mathrm{e}^{-\tau}$ *eine* Lösung für den kritische gedämpften Oszillator ist.

(d) Zeigen Sie, dass diese Lösung zwei (für z_0 positiv und negativ) stabile Mannigfaltigkeit des Fixpunktes beschreibt. Skizzieren Sie die Mannigfaltigkeiten.

(e) Für welche Funktionen $f(\tau)$ beschreibt der Ansatz $z(\tau) = f(\tau)\,\mathrm{e}^{-\tau}$ eine Lösung der Bewegungsgleichung? Zeichnen Sie auch diese Lösungen.

2. Ein Teilchen unter Einfluss einer Zentralkraft.

Ein Testteilchen der Masse m und der Position $\vec{r}(t)$ bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\,\vec{r}\,.$$

(a) Wir interessieren uns in dieser Aufgabe für gebundene Trajektorien, d.h. $r(t) = |\vec{r}(t)|$ soll für alle Zeiten nach oben beschränkt sein. Welche Bedingung muss man dann an k stellen?

(b) Bestimmen Sie die Energie des Teilchens und zeigen Sie, dass die Energie erhalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L} = m\,\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$ des Teilchens erhalten ist. Gilt dies auch bei einer anderen Wahl des Koordinatenursprungs?
Hinweis: Das Zentrum des Kraftfeldes befindet sich dann nicht mehr im Koordinatenursprung.

(d) Es seien nun (x_1, x_2) die Koordinaten in der durch den Drehimpuls festgelegten Ebene. Zeigen Sie, dass $m\ddot{x}_i(t) + k\,x_i(t) = 0$ für $i \in \{1,2\}$. Geben Sie die Lösung dieser Gleichung an und zeigen Sie, dass $(z_1(t), z_2(t))$ eine Ellipsenbahn beschreibt.

(e) Berechnen Sie den Drehimpuls und die Energie basierend auf der in (d) gefundenen Lösung.

3. Zwei Teilchen mit harmonischer Wechselwirkung.

Betrachten Sie nun zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 an den Positionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$. Die Wechselwirkung sei eine harmonische Kraft, so dass

$$m_1\,\ddot{\vec{q}}_1(t) = -k\left(\vec{q}_1(t) - \vec{q}_2(t)\right),$$
$$m_2\,\ddot{\vec{q}}_2(t) = -k\left(\vec{q}_2(t) - \vec{q}_1(t)\right).$$

(a) Diskutieren Sie die Bewegung des Schwerpunktes der beiden Teilchen.

(b) Diskutieren Sie die Relativbewegung.

(c) Wie unterscheiden sich die resultierenden elliptischen Bahnen von denen des Keplerproblems?

Bonus. Elipsenbahnen für das Keplerproblem.

In der Vorlesung haben wir die Bewegung von zwei Himmelskörpern der Massen m_1 und m_2 diskutiert, die mittels der Gravitation wechselwirken. Die Bewegung des Schwerpunktes verläuft gleichförmig und gradlinig. Für die Relativkoordinate $\vec{d}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung,

$$\mu\ddot{\vec{d}} = -\frac{m_1\,m_2\,G}{|\vec{d}|^3}\,\vec{d}$$

mit $\mu = m_1\,m_2/M$, $M = m_1 + m_2$ und der Gravitationskonstante $G \simeq 6.67\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$. Für die vollständige Herleitung der Keplerschen Gesetze der Planetenbahenen müssen wir noch zeigen, dass die Bahn $\vec{d}(t)$ eine Ellipse beschreibt. Da die Bahn in einer Ebene liegt diskutieren wir das Problem in Polarkoordinaten $\vec{d} = d\,\hat{r}(\theta)$, wobei $d = |\vec{d}|$. Die Richtung senkrecht zur Ebene sei $\hat{z}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Radial- und Winkelkomponenten folgenden Bewegungsgleichungen genügen

$$\begin{aligned} \ddot{d} - d\,\dot{\theta}^2 &= -\frac{M\,G}{d^2} \\ d\,\ddot{\theta} + 2\dot{d}\,\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls in Polarkoordinaten folgende Form annimmt

$$\vec{L} = \mu\dot{\vec{d}} \times \vec{d} = \mu\, d^2\, \dot{\theta}\; \hat{z} = L_z\, \hat{z}$$

und benutzen Sie das Resultat aus (a), um zu zeigen, dass L_z erhalten ist.

(c) Aufgrund der Drehimpulserhaltung kann man $\dot{\theta}$ in der Gleichung für $\ddot{d}$ eliminieren

$$\ddot{d} - \frac{L_z^2}{\mu^2\, d^3} + \frac{M\,G}{d^2} = 0$$

Zeigen Sie, dass weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \dot{d} &= -\frac{L_z}{\mu}\, \partial_\theta d^{-1} \\ \ddot{d} &= -\frac{L_z^2}{\mu^2\, d^2}\, \partial_\theta^2 d^{-1} \end{aligned}$$

Hinweis: Argumentieren und verwenden Sie, dass $\dot{d} = \dot{\theta}\,\partial_\theta d$.

(d) Zeigen Sie, dass $u = d^{-1}$ der folgenden DGl genügt

$$\partial_\theta^2 u = -u + \frac{\mu^2\, MG}{L_z^2}$$

Lösen Sie die DGl und zeigen Sie, dass als Folge (bei geeigneter Wahl der Koordinatenachsen! Welche?)

$$d(\theta) = \frac{P}{1 + \epsilon\, \cos\theta}\,.$$

Dies ist die Darstellung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten. Für Exzentrizität $\epsilon = 0$ beschreibt die Gleichung einen Kreis, für $0 < \epsilon < 1$ eine Ellipse, für $\epsilon = 1$ eine Parabel und für $\epsilon > 1$ Hyperbelbahnen. Der Halbparameter P entspricht der halben Breite des Kegelschnitts am Brennpunkt. Wie hängen ϵ und P von μ, M, G und L_z ab?