Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 22. 10. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 3. Bewegungsgleichungen

1. Bewegung in einem Potential.

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens an der Postion $x(t)$ in einem Potential $\Phi(x)$. Zeichnen Sie die Trajektorien im Phasenraum $(x, \dot{x})$ für folgende Potentiale:

(a) Ein harmonisches Potential, $\Phi(x) = m\omega^2 x^2/2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ein Potentialtopf mit (genau) einem Minimum.

(c) Ein Doppelmuldenpotential.

(d) Eine Kombination $\Phi(r) = \Phi_{\mathrm{LJ}}(r) + \Phi_{\mathrm{c}}(r)$ des Lennard-Jones-Potentials $\Phi(r) = \epsilon\,[(a/r)^{12} - 2\,(a/r)^6]$ und der Coulomb-Abstoßung $\Phi(r) = c/r$. Hier sind ϵ, a, c positive Konstanten und $r \in \mathbb{R}^+$ ist der Abstand zwischen zwei (punktförmig gedachten) Molekülen.

Diskutieren Sie insbesondere die Fälle, bei denen die Gesamtenergie $E = \dot{x}^2/2 + \Phi(x)$ einem Wert entspricht, für den das Potential ein Extremum aufweist.

2. Das gedämpfte mathematische Pendel.

Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung $\theta(t)$ eines gedämpfte mathematischen Pendels aus der Ruhelage $\theta_c = 0$ ist

$$\ddot{\theta}(t) = -\gamma\dot{\theta}(t) - \sin\theta(t)\,.$$

Die Eigenfrequenz des Pendels ist hier wieder in der Wahl der Zeitskala absorbiert.

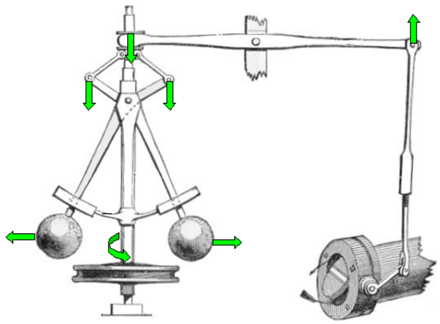
(a) Welche Lösungen hat diese Gleichung für $\theta \ll 1$ und $\theta \simeq \pi$?

(b) Beweisen Sie, dass $\dot{\theta}^2 - 2\cos\theta$ strikt monoton fällt, wenn $\dot{\theta} \neq 0$. Was bedeutet dies physikalisch?

(c) Wie verändern sich die Trajektorien *qualitativ*(!) für ein Pendel mit kleiner Dämpfung, $0 < \gamma \ll 1$, gegenüber dem Fall ohne Dämpfung?

(d) Wie ändert sich das Bild für starke Dämpfung?

3. Fehlersuche: Fliehkraftregler.



Wikimedia Commons

Ein Fliehkraftregler wird in Dampfmaschinen verwendet, um beim Überschreiten einer vorgegebenen Drehfrequenz Ω_c die Drosselklappe in der Dampfleitung der Maschine zu öffnen. Für kleinere Frequenzen hängen die Kugeln nach unten und die Klappe ist geschlossen. Beim Überschreiben von Ω_c werden die Kugeln von der Fliehkraft nach außen gedrückt und es wird Dampf abgelassen.

Aufgrund der Symmetrie haben die beiden Kugeln dieselbe kinetische und potentielle Energie. Wir betrachten daher nur eine Kugel und beschreiben ihre Position durch die vertikalen Position z, den Abstand von der Rotationsachse r und den Winkels ϕ, der die Position der Kugel in der horizontalen Ebene beschreibt. Die Länge des Armes, an dem die Kugel aufgehängt ist, sei L, die Masse der Kugel sei M, und den Winkel zwischen dem Arm und der Senkrechten nennen wir θ. Der Fliehkraftregler rotiert mit der Frequenz Ω.

(a) Skizzieren Sie das Problem mit Benennung der physikalischen Größen und Koordinaten. Geben Sie auch die Einheitsvektoren des othonormalen Basissystems zu den Koordinaten (z, r, ϕ) an. Bezüglich dieser Basis soll die Position der Kugel folgende Form annehmen:

$$\vec{q}(t) = -L\,\cos\theta(t)\;\hat{z} + L\,\sin\theta(t)\;\hat{r}(\phi(t)) \qquad \text{mit} \quad \phi(t) = \Omega t\,.$$

(b) Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin} der Kugel und ihre potentielle Energie E_{pot} im Gravitationsfeld.

(c) Untersuchen Sie ob die Summe aus kinetischer und potentieller Energie für diese Bewegung erhalten ist. Bestimmen Sie dazu die Zeitableitung von $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ und zeigen Sie dass die Ableitung verschwindet, wenn entweder $\dot{\theta} = 0$ oder

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \sin\theta(t)\;\left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos\theta(t)\right] \qquad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}\,.$$

(d) Der Fliehkraftregler hat immer ein wenig Reibung $-\gamma\dot{\theta}$. Analysieren Sie daher die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \sin\theta(t)\;\left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}\cos\theta(t)\right] - \gamma\dot{\theta}$$

Was passiert bei langsamer Rotation $\Omega^2 \ll \omega^2$? Was verändert sich für $\Omega^2 \gtrsim \omega^2$? Ist dieses Resultat *physikalisch* plausibel? Wenn nicht: Wieso nicht? Woran könnte das liegen?

Bonus. Fehlersuche in Populationsmodellen.

Das Lotka-Volterra-Modell gilt als erstes Modell zur Zeitentwicklung von Populationsgrößen in der theoretischen Biologie. Es sagt eine stabile Oszillation der Populationen vorher, die bis heute immer wieder zur Erkärung von Daten zu Hasen und Luchsen in Kanada herangezogen wird (siehe Abbildung nächste Seite).

Es sei $B(t)$ die Biomasse der Beutetiere (Hasen) und $R(t)$ die Biomasse der Räuber (Luchse). In Abwesenheit von Räubern wächst $B(t)$ exponentiell mit Rate a und diese Rate reduziert sich um $-bR(t)$, wenn die Beute von den Räubern gefressen wird. In Abwesenheit von Nahrung sterben die Räuber mit einer Rate d, und diese Rate reduziert sich um $-cB(t)$, wenn sie Beutetiere fressen können.

$$\dot{B}(t) = B(t)\ \ [a - b\,R(t)]$$

$$\dot{R}(t) = R(t)\ \ [c\,B(t) - d]$$

(a) Es sei $u(\tau) \propto B(t)$, $v(\tau) \propto R(t)$ und $\tau \propto t$. Finden Sie geeignete Proportionalitätskonstanten und den dimensionlosen Parameter π, so dass

$$\begin{aligned} \dot{u}(\tau) &= \quad u(\tau)\ \ [1 - v(t)] \\ \dot{v}(\tau) &= \pi^2\, v(\tau)\ \ [u(\tau) - 1] \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass diese Bewegungsgleichung Fixpunkte hat für $(0, 0)$ und für $(1, 1)$. Wie verhalten sich die Populationsgrößen in der Nähe der Fixpunkte?

(c) Skizzieren Sie den Verlauf der Lösungen in der (u, v)-Ebene und vergleichen Sie Ihr Resultat mit den Messdaten zu den Luchsen und Hasen. Wo ist der qualitative Unterschied zwischen Modell und Daten?
Hinweis: Wer frisst hier wen?

(d) Die Form der Trajektorien im Modell kann man bestimmen, indem man ausnützt

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \pi^2\ \frac{v\,(u-1)}{u\,(1-v)}\,.$$

Warum gilt dies?

(e) Lösen Sie die Gleichung durch Separation der Variablen und zeigen Sie, dass das Resultat folgende Konstante der Bewegung impliziert

$$\Phi(u, v) = \ln\,(v\,u^{\alpha}) - v - \alpha\,u\,, \qquad \text{mit geeignet gewähltem } \alpha > 0.$$

Verifizieren Sie dieses Resultat, indem Sie auch die Zeitableitung von $\Phi(u(\tau), v(\tau))$ berechnen. Hier ist $(u(\tau), v(\tau))$ eine Lösungen der Bewegungsgleichung.

Anmerkung: Das Auffinden einer Erhaltungsgröße sollte man als Artefakt eines Modells betrachten, wenn es keine modellimmanente (d.h. hier: biologische) Begündung dafür gibt.

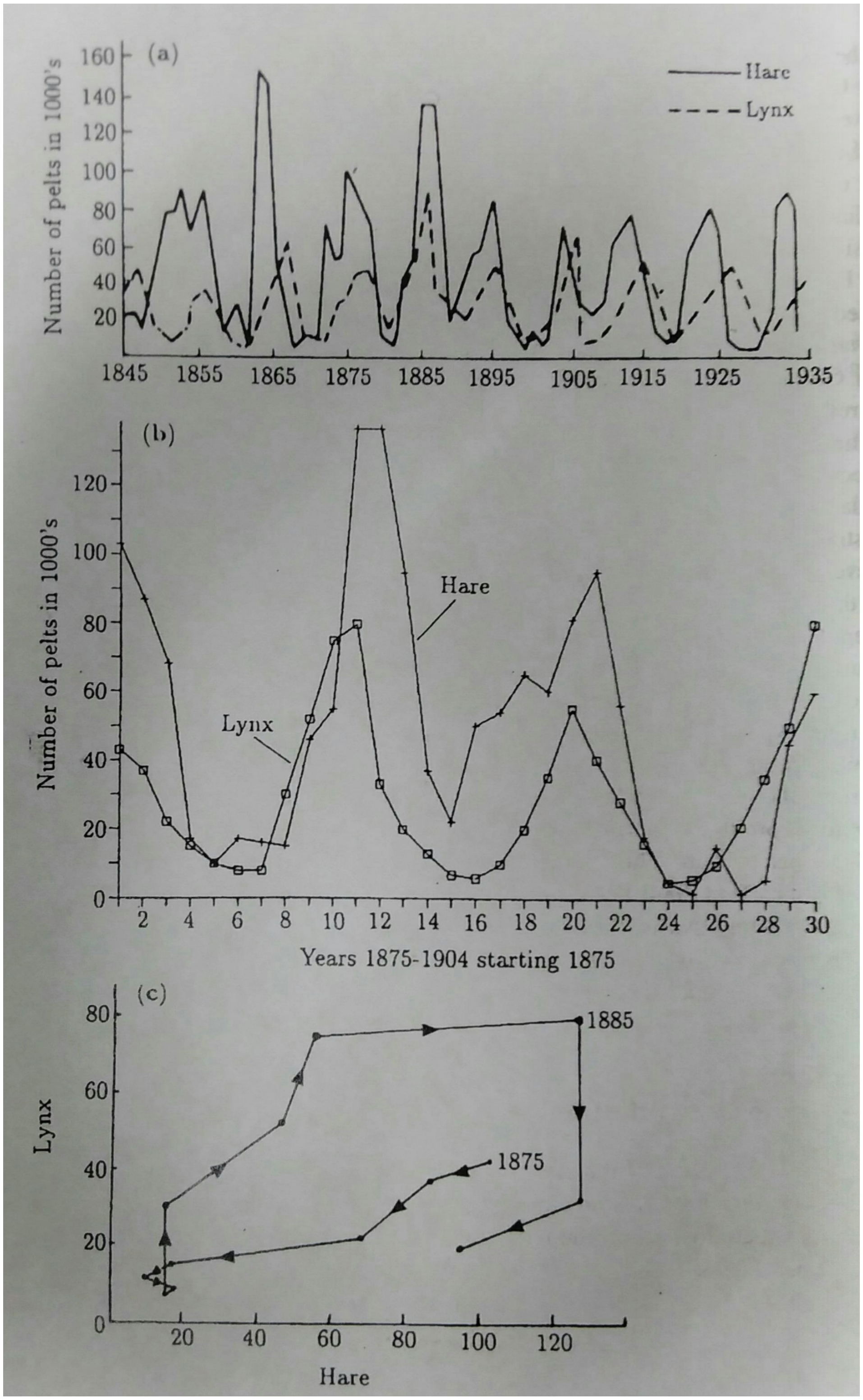


Abbildung 1: (a) Jährliche Schwankungen der von der Hudson-Bay-Gesellschaft erworbenen Pelze von Hasen (Hare) und Luchsen (Lynx). (b) Daten mit höherer Zeitauflösung für die 30 Jahre von 1875 bis 1904. (c) Darstellung der Daten aus (b) als Phasenraumplot. [Dies ist Abbildung 3.3. aus J.D. Murray: *Mathematical Biology* (Springer, 2002). Das Buch diskutiert ausführlich grundlegende Annahmen und Artefakter von Populationsmodellen.]