Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mi, 17. 10. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 2. Mehrdimensionale Analysis, Differentialgleichungen

1. Gradienten.

(a) Höhenlinien sind Linien in der Zahlenebene (x, y), auf denen die Funktion $f(x, y)$ konstant ist. Skizzieren Sie die Höhenlinien von

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \qquad \text{und} \qquad f_2(x, y) = -x^2\, y^2$$

(b) Berechnen Sie die Gradienten $\nabla f_1(x, y)$ und $\nabla f_2(x, y)$.

(c) Zeichnen Sie die Gradienten in die Skizzen mit den Höhenlinien ein.
Welche Richtung hat der Gradient?

2. Konservative Kraftfelder.

Ein Vektorfeld $\vec{K}(x, y, z)$ heißt konservativ, wenn man es als Gradient eines Potentials $U(x, y, z)$ schreiben kann.

(a) Beweisen Sie, dass $\nabla \times \vec{K}(x, y, z) = 0$, wenn $\vec{K}(x, y, z)$ konservativ ist.

(b) Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ?

$$\vec{K}_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\vec{K}_2(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

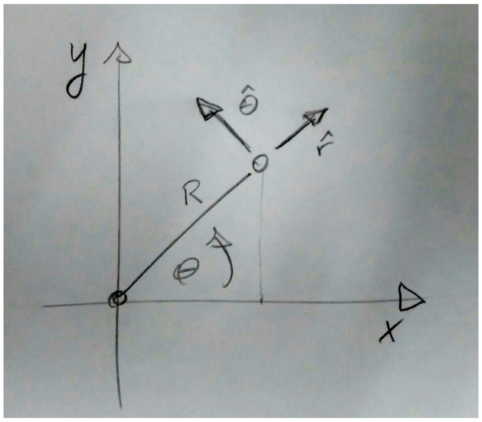
$$\vec{K}_3(x, y, z) = \big(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 0\big)$$

(c) Geben Sie das zugehörige Potential an, sofern es existiert.

(d) Fassen Sie die Vektorfelder als Kraft auf ein Teilchen auf, und berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um das Teilchen vom Koordinatenursprung an die Position $(1, 2, 0)$ zu bringen. Verwenden Sie dazu Linienintegrale entlang der Wege

$$C_1 : \ (t, 2t, 0) \qquad \text{und} \qquad C_2 : \ (t^3, 2t^2, 0)$$

3. Koordinaten.



Die Position eines Teilchens in der Ebene kann angegeben werden mittles kartesischer Koordinaten (x, y) oder mittels Polarkoordinaten mit den Basisvektoren $\hat{r}(\theta)$ und $\hat{\theta}(\theta)$, mit den folgenden kartesischen Koordinaten (siehe Skizze links)

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Bahn eines Teilchens $\vec{q}(t)$ mit Masse m, dass sich auf einem Kreis mit Radius R bewegt.

(a) Verifizieren Sie, dass $\hat{\theta} = \partial_\theta \hat{r}$ and $\partial_\theta^2 \hat{r} = -\hat{r}$.
Können Sie das Resultat *geometrisch* interpretieren?

(b) Die Position des Teilchens kann angegeben werden als $\vec{q}(t) = R\,\hat{r}(\theta(t))$. Bestimmen Sie $\dot{\vec{q}}$ und $\ddot{\vec{q}}$ ausgehend von dieser Gleichung, und überprüfen Sie das Resultat durch die Rechnung in kartesischen Koordinaten.

(c) Betrachten Sie die Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, $\theta(t) = \omega t$ und zeigen Sie, dass in dem Fall die Beschleunigung $\ddot{\vec{q}} = -R\,\omega^2\,\hat{r}(\omega t)$ senkrecht zur Geschwindigkeit $\dot{\vec{q}}$ steht. Was bedeutet dies für den Betrag der Geschwindigkeit?

4. Differentialgleichungen und funktionale Abhängigkeiten.

Bestimmen Sie Differentialgleichungen, deren allgemeine Lösung von folgender Form ist:

(a) $y(x) = C\,x^2 - x$ (b) $y^2(x) = A\,x + B$

Dabei sollen die reellen Konstanten A, B und C jeweils Anfangsbedingungen der Lösungen festlegen.
Hinweis: Suchen Sie Beziehungen zwischen $y(x)$ und den jeweiligen Ableitungen, die *nicht* von A, B und C abhängen.

5. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 y}{2y^2 + 1}, \quad \text{so dass} \quad y(0) = 1$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1 + y^3}{xy^2\,(1 + x^2)}, \quad \text{so dass} \quad y(1) = 2$$

Hinweis: Gegebenenfalls reicht eine implizite Darstellung der Lösung.

Bonus. Freier Fall mit turbulenter Reibung.

Wenn eine fallende Kugel laminar umströmt wird, wächst der Reibungsterm $-\gamma v$ linear an mit der Geschwindigkeit v. Wenn die Bewegung der Flüssigkeit turbulent wird, wächst der Reibungsterm quadratisch. Es ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\dot{v}(t) = -g - \frac{\operatorname{sign}(v(t))}{\lambda}\, v^2(t) \ ,$$

wobei die Längenskala λ die turbulente Schicht in der Nähe der Kugel charakterisiert.

(a) Wieso benötigt man in dieser Gleichung einen Faktor $\operatorname{sign}(v(t))$?

(b) Finden Sie eine geeignete Geschwindigkeitsskala V und Zeitskala T, so dass $w(\tau) = v(t)/V$ und $\tau = t/T$ der folgenden Gleichung genügt

$$\frac{\mathrm{d}w(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = -1 - \operatorname{sign}(v)\, w^2(\tau)\,.$$

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung für die Anfangsgeschwindigkeiten $w_0 > 0$, $-1 < w_0 \leq 0$ und $w_0 < -1$. Was passiert für $w_0 = -1$? Mit welcher Geschwindigkeit fällt die Kugel dann?

(d) Skizzieren Sie die Lösungen für $w_0 > -1$ und $w_0 < -1$ und interpretieren Sie den Kurvenverlauf. Was passiert, wenn $w_0 > 0$? Wie verhalten sich die Lösungen für $\gamma t \gg 1$?

(e) Wie unterscheidet sich die Bewegung mit turbulenter Reibung von der mit viskoser Reibung? Wie entscheidet man, welche Reibung für ein konkretes Problem berücksichtigt werden sollte?