Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 21. 1. 2019

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 14. Chaotische Dynamik

1. Bewegungsintegrale und Poisson-Klammern.

Es sei $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eine Hamilton-Funktion mit Koordinaten $\vec{q}$ und dazu kanonische konjugierten Impulsen $\vec{p}$. Die Poisson-Klammer für zwei Funktionen $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ist dann definiert als

$$\{f, g\} := \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\quad \dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\},$

so dass $\{H, f\} = 0$ für alle zeitunabhängigen Bewegungsintegrale.

(b) Zeigen Sie, dass für $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $f_1(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $f_2(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und eine konstante Funktion c folgende Beziehungen gelten

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \qquad \{f, c\} = 0$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \qquad \{f_1\, f_2, g\} = f_1\, \{f_2, g\} + f_2\, \{f_1, g\}$$

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \qquad \{f, p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k}$$

(c) Die Poisson-Klammer liefert einen einfachen Test, ob die Koordinaten $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und Impulse $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ kanonisch konjugiert sind. Zeigen Sie, dass dann gelten muss

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \qquad \{P_i, P_j\} = 0 \qquad \{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}$$

Hinweis: Ermitteln Sie zwei Darstellungen für $\{Q_i, Q_j\}$, deren Summe Null ergibt: Wenn $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ kanonisch konjugiert sind, dann kann man die Transformation generieren durch $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$, und man findet, dass $\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \dfrac{\partial p_j}{\partial P_i}$. Alternativ findet man für $F_4(\vec{p}, \vec{P}, t)$, dass $\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -\dfrac{\partial q_j}{\partial P_i}$.

(d) Die Poisson-Klammer kann auch verwendet werden um aus bekannten Bewegungsintegralen $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ein neues (möglicherweise triviales) Bewegungsintegral zu ermitteln:

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dg}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\{f, g\} = 0$$

Hinweis: Verwenden Sie für diese Rechnung (ohne Beweis) die Jacobi-Identität $\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0$ und das Resultat aus (a).

2. Angestoßener Rotor.

Die Konfiguration eines Rotors entspricht der eines horizontal stehenden mathematischen Pendels: Ein Gewicht der Masse m kann an einer masselos gedachten starren Stange frei um ein Gelenk rotieren. Die Bewegung verläuft in der (x, y)-Ebene. Die Stellung des Rotors bezüglich der positiven x-Achse sei θ.

(a) Skizzieren Sie den Konfigurationsraum und die Bewegung.

(b) Stellen Sie die Hamilton-Funktion für eine kräftefreie Bewegung auf. Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für θ und den zu θ konjugierten Impuls p_θ. Was ist die Lösung dieser Gleichungen?

(c) Der Rotor ohne äußere Kräfte hat zwei triviale Erhaltungsgrößen. Welche? Wieso war das klar, *ohne* betrachten der Bewegungsgleichungen.

(d) Nun stoßen wir den Rotor an mit periodischen Kraftstößen in y-Richtung. Die Stöße kann man beschreiben durch ein zeitabhängiges Potential der Form

$$\Phi(\theta, t) = A \cos\theta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)$$

Dabei ist A die Amplitude der Stöße, T ist die Periode des Antriebs, und $\delta(t)$ ist eine Deltafunktion,

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t) \qquad \text{mit} \quad \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon^{-1} & \text{for} \quad -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

(e) Bestimmen sie die stroboskopische Abbildung, die die Position θ und den Impuls p_θ direkt nach einem Stoß für aufeinander folgende Stöße miteinander in Beziehung setzt. Ist die Periode T ein relevanter Parameter der Dynamik?
Hinweis: Verwenden Sie, dass zwischen zwei Stößen keine Kraft wirkt und die Bewegung dann, wie in (b) bestimmt verläuft. Bestimmen Sie dann noch die Änderung von θ und p_θ aufgrund des Stoßes.

(Bonus) Modifizieren Sie eines der auf der Homepage gegebenen Sage-Skripte, so dass es die stroboskopische Abbildung des angestoßenen Rotors beschreibt. Wie ändert sich die Abbildung, wenn man A erhöht? Finden Sie das Hufeisen?

3. Arnold's Cat Map.

In der Vorlesung haben wir die Poincaré-Abbildung für einen rotierenden Ball der an zwei horizontalen Platten (Fußboden und Tischplatte) reflektiert wird betrachtet. Die Abbildung ist linear und wir haben argumentiert, dass sie daher *nicht* chaotisch ist. Nun zeigen wir, dass diese Schlussfolgerung nicht mehr gilt, wenn man Variablen betrachtet, die periodisch sind modulo einer festen Länge (also beispielsweise Winkel modulo 2π). Dies demonstrieren wir anhand von Arnold's Cat Map

$$\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1] \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mod 1$$

(a) Bestimmen sie die Eigenwerte $\lambda_\pm$ der Matrix und zeigen Sie, dass $\lambda_+ \lambda_- = 1$. Mit passender Skalierung können x und y daher Winkel aufgefasst werden und die Abbildung $\mathcal{C}$ als Poincaré-Abbildung einer Hamiltonschen Dynamik.

(b) Skizzieren Sie zunächst im $\mathbb{R}^2$ das Bild des Einheitsquadrates unter der Matrix. Die Modulo-Abbildung hat dann vier Zweige, bei denen folgende ganzzahlige Anteile von (x, y) fallen gelassen werden: Zweig 1: $(0, 0)$, Zweig 2: $(0, 1)$, Zweig 3: $(1, 1)$, Zweig 4: $(1, 2)$. Welche Gebiete in $[0, 1] \times [0, 1]$ werden jeweils mit einem Zweig der Abbildung $\mathcal{C}$ abgebildet? Wo liegen die Bilder dieser Gebiete?

(c) Die Schnittmengen der Bilder und Urbilder definieren 16 Regionen im Einheitsquadrat. Skizzieren Sie die Regionen und beschriften Sie sie jeweils mit zwei Symbolen $(a.b)$, die anzeigen welcher Zweig zuletzt (a) und welcher als nächstes (b) verwendet wird.

(Bonus) Zeigen Sie, dass 1. Die Regionen (1.1), (1.2), (2.1) und (2.2) bilden zwei diskunkte Gebiete. Sie werden von der Abbildung auf vier diskunkte Gebiete abgebiltet. Allerdings liegt das Gebiet 21. $= \mathcal{C}(2.1)$ vollständig in der rechten oberen Hälfte des Einheitsquadrates. Daher kann es keine chaotischen Bahnen geben, die die Regionen 1 und 2 nie verlassen. 2. Die Regionen (2.2), (2.3), (3.2) und (3.3) bilden zwei diskunkte Gebiete, die von der Abbildung auf vier diskunkte Gebiete abgebiltet werden. Allerdings liegen die Gebiete 332. vollständig in Gebiet 4, und 223. liegt vollständig in 1. Daher kann es keine chaotischen Bahnen geben, die die Regionen 2 und 3 nie verlassen.
Wegen der Symmetrie der Abbildung müssen chaotische Trajektorien daher immer mindestens drei Symbolde enthalten.

(d) Wir betrachten die Bilder und Urbilder des Punktes $P_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie dass die Punkte $(P_j = \mathcal{C}^j(P_0), j \in \mathbb{Z})$ eine homokline Trajektorie bilden:
Für $j \geq 0$ liegt P_j im Zeig 3 und die Punkte konvergieren zu $(1, 0)$. Der Abstand zu $(1, 0)$ ist proportional zu λ_-^n.
Für $j < 0$ liegt P_j im Zeig 1 und der Abstand der Punkte zum Ursprung ist proportional zu λ_+^{-j}.

(Bonus) **Das Stehaufpendel.**

Auch wenn Antreiben in der Regel zu chaotischer Bewegung führt, so kann die Phaseraumregion, in der sich das System aufhält, ausgesprochen nicht-intuitiv sein. Ein schönes Beispiel hierfür ist ein mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt mit hoher Frequenz vertikal vibriert: Der instabile Fixpunkt, bei dem das Pendel senkrecht nach oben steht, wird dann oft stabilisiert. Lesen Sie mehr dazu in

James A. Blackburn, H. J. T. Smith, N. Grønbech-Jensen:
Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum
American Journal of Physics 60 (1992) 903
`https://doi.org/10.1119/1.17011`