

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 13. Kanonische Transformationen

1. Erzeugenden Funktionen für kanonische Koordinatentransformationen.

In der Vorlesung haben wir diskutiert, wie man für eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ mittels generierender Funktionen der Form $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ und $F_2(\vec{q}, \vec{P})$ die neuen Koordinaten $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und die neue Hamilton-Funktion $K(\vec{q}, \vec{p}, t)$ findet.

- Diskutieren Sie die Vorgehensweise für die erzeugende Funktion $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t)$. Wie bestimmt man dann $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t)$? Welche Abhängigkeit besteht zwischen der neuen Koordinate $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und den alten Koordinaten \vec{q} und Impulsen \vec{p} ?
- Diskutieren Sie $F_4(\vec{p}, \vec{P})$ analog zur Aufgabenstellung in (a).
- Was bewirkt die von $F_4(\vec{p}, \vec{P}) = -\vec{p} \cdot \vec{P}$ generierte kanonische Transformation?
- Mit welcher kanonischen Transformation lassen sich die Impulse von \vec{p} auf die neuen Funktionen $\vec{P}(\vec{p}, t)$ transformieren? Wie bestimmt man dann die neuen Koordinaten $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und die Hamilton-Funktion.

2. Ein Teilchen im harmonischen Potential.

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m an der Position $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, welches sich in einem harmonischen Potential der Form $\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2 |\vec{x}|^2$ bewegt.

- Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion. Berechnen Sie die zu \vec{x} konjugierten Impulse und, darauf basierend, die Hamilton-Funktion und die Bewegungsgleichungen.
- Bestimmen Sie die Auswirkung der von

$$F_2(\vec{x}, \vec{P}) = P_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + P_2 \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{in } d = 2$$

generierten kanonischen Transformation. Bestimmen sie die resultierende Hamilton-Funktion $K(\vec{Q}, \vec{P}, t)$.

- (c) Für $d = 1$ betrachten wir noch eine weitere kanonischen Transformation, die generiert wird durch¹

$$F_1(x, \tilde{Q}) = \frac{m\omega x^2}{2} \cot \tilde{Q}.$$

Bestimmen Sie $x(\tilde{Q}, \tilde{P})$ und $p(\tilde{Q}, \tilde{P})$. Welche Form hat die Hamilton-Funktion in den neuen Koordinaten und was ergibt sich für die Bewegungsgleichungen?

- (Bonus) Abschließend fassen wir (x, p) als Koordinaten in einer komplexen Ebene auf und betrachten die zeitabhängige Transformation²

$$F_t(x, \bar{Q}, t) = i \left(\frac{\bar{Q}^2}{2} e^{-2i\omega t} - \sqrt{2m\omega} x \bar{Q} e^{-i\omega t} + \frac{m\omega x^2}{2} \right).$$

Bestimmen Sie $x(\bar{Q}, \bar{P})$ und $p(\bar{Q}, \bar{P})$. Welche Form hat die Hamilton-Funktion in den neuen Koordinaten und was ergibt sich für die Bewegungsgleichungen?

Hinweis: Was ist beim Berechnen der neuen Hamilton-Funktion zu beachten, dass die Transformation zeitabhängig ist?

3. Zwei Teilchen.

Wir betrachten zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 an den Positionen $\vec{q}_1(t)$ und $\vec{q}_2(t)$. Sie wechselwirken mit einer konservativen Kraft, die durch ein Potential $\Phi(|\vec{q}_2 - \vec{q}_1|)$ beschrieben ist. Es wirken keine weiteren Kräfte. Die Hamilton-Funktion $H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$ für dieses System wurde in Aufgabe 13(b) bestimmt. Um die Rechnungen übersichtlicher zu gestalten nutzen wir aus, dass die Bewegung in einer Ebene verläuft, so dass $\vec{q}_1(t), \vec{q}_2(t) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Bestimmen Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
 (b) Bei der Behandlung von Zentralkräften (Blatt 4) hatten wir diskutiert, dass es günstiger ist dieses Problem in Schwerpunkts- \vec{R} und Relativkoordinaten \vec{L} zu behandeln (L für Länge, nicht als Symbol für den Drehimpuls),

$$\begin{aligned} \vec{R}(t) &= [m_1 \vec{q}_1(t) + m_2 \vec{q}_2(t)] / (m_1 + m_2) \\ \vec{L}(t) &= \vec{q}_2(t) - \vec{q}_1(t) \end{aligned}$$

Für die Position des Schwerpunktes wählen wir kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten für die Relativkoordinaten $\vec{L}(t) = L(t) \hat{e}(\theta(t))$. Wie sieht die Hamilton-Funktion für diese Koordinaten aus.

Hinweis: Ich fand es einfacher erst die Lagrange-Funktion in den neuen Koordinaten zu bestimmen und ausgehend von dort die Hamilton-Funktion. Alternativ kann man die Impulse auch mittels der erzeugenden für die entsprechende kanonische Transformation bestimmen.

¹Die Tilde weist darauf hin, dass es sich um andere Koordinaten handelt wie in (b). Wenn das geklärt ist, können Sie es in Ihrer Lösung auch weglassen.

²Der Balken weist darauf hin, dass (\bar{Q}, \bar{P}) andere Koordinaten sind wie zuvor. Wenn das geklärt ist, können Sie es in Ihrer Lösung auch weglassen.

- (c) Bestimmen Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $\vec{R}(t)$. Wie bewegt sich der Schwerpunkt?
 - (d) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ und den konjugierten Impuls. Eine der beiden Gleichungen lässt sich einfach lösen. Interpretieren Sie das Resultat.
 - (e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $L(t)$ und den konjugierten Impuls.
- (Bonus) Zeigen Sie, dass die Gleichungen für L und p_L integriert werden können und dass sie auf folgende Erhaltungsgröße führen

$$K = \frac{p_L^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2L^2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Phi(L)$$

Es sei nun $\Phi(L)$ ein Potential, das mit dem Abstand L streng monoton anwächst. Skizzieren Sie die Lösungen im Phasenraum $(L(t), p_L(t))$. Wie unterscheiden sich die Lösungen für nach oben beschränkte und unbeschränkte Potentiale?

Bonus. Hamiltonsche Dynamik.

Ich habe Updates für die Sage-Skripte ins Netz gestellt, die ich nun unter Windows und Linux getestet habe. Im Laufe der Woche möchte ich Skripte erstellen, die den symplektischen Fluss im Phasenraum für einige Hamiltonsche Dynamiken veranschaulichen.

Zu meiner Überraschung konnte ich da nichts wirklich Schönes finden, auf das ich hier verweisen könnte.