Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 07. 01. 2019

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 12. Partielle Ableitungen und Hamilton-Funktionen

1. Partielle Ableitungen in zwei Dimensionen.

In der Vorlesung haben wir den Koordinatenwechsel von (x, y) nach $(x, q(x, y))$ für das totale Differential einer total differenzierbaren Funktion f diskutiert und gezeigt,[1] dass

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_q + \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_x \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_y \right) \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_x \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_x \mathrm{d}y \\ &= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_q \right) \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial q}\right|_x \mathrm{d}q \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe betrachten wir nun Koordinatenwechsel von (x, y) nach $(p(x, y), q(x, y))$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_p \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_y \right) \mathrm{d}x + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_x + \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_p \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_x \right) \mathrm{d}y \\ &= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial p}\right|_q + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial p}\right|_q \right) \mathrm{d}p + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial q}\right|_p + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial q}\right|_p \right) \mathrm{d}q \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$. Bestimmen Sie das totale Differential für die kartesischen Koordinaten (x, y). Verwenden Sie das Resultat aus (a) um auch den Ausdruck in Polarkoordinaten (R, θ) zu bestimmen. Überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die Funktion $f(R, \theta)$ in Polarkoordinaten bestimmen und das totale Differential direkt berechnen.

(c) Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion $g(R, \theta) = R^2 \sin(4\theta)$ für kartesische Koordinaten (x, y).

(Bonus) Bestimmen Sie die gemischten Ableitungen $\partial_x \partial_y g$ und $\partial_y \partial_x g$ für $(x, y) = (0, 0)$. Was besagt das Resultat über die totale Differenzierbarkeit der Funktion $g(x, y)$?

[1] Die zweite Gleichung ergibt sich durch Vertauschen von y und q.

2. Partielle Ableitungen in mehr als zwei Dimensionen.

(a) Wie ändern sich die in Aufgabe 1(a) gefundenen Ausdrücke für Koordinatenwechsel von $(x_1, \dots, x_d)$ nach $(q_1, \dots, q_d)$?

(b) Bestimmen Sie nun das totale Differential der Funktion $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ in kartesischen, Zylinder- und Kugel-Koordinaten. Verfolgen Sie dazu beide Rechenwege: i) Verwenden der in Aufgabenteil (a) bestimmten Formeln; ii) Ausdrücken von f in den neuen Koordinaten und anschließendes Bestimmen der partiellen Ableitungen.

(c) Bestimmen Sie nun das totale Differential der Funktion $G(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ in kartesischen, Zylinder- und Kugel-Koordinaten. Wählen Sie hier jeweils den bequemeren Rechenweg.
In kartesischen und in Zylinder-Koordinaten finden Sie in diesem Fall dieselbe Funktion für die partiellen Ableitungen bezüglich z. Dahingegen ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für die partiellen Ableitungen bezüglich R in Zylinder- und Kugel-Koordinaten. Woran liegt das?

3. Hamilton Funktionen.

Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion für folgende Systeme. Ausgangspunkt ist eine Lagrange-Funktionen, die wir in einer früheren Aufgaben diskutiert haben. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Bestimmen Sie jeweils die Impulse $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$ zu den Koordinaten q_i.
2. Bestimmen Sie die Funktionen $\dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p})$.
3. Berechnen Sie $\vec{p}\,\dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}) - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}), t)$, d.h. einsetzen und vereinfachen.

(a) Ein Teilchen in einem konservativen Kraftfeld $\Phi(x, y, z)$.

(b) Zwei Teilchen mit einer Kraft, die nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängt. Die Positionen der Teilchen werden in kartesischen Koordinaten $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ angegeben.

(Bonus) Was geschieht für N Teilchen, zwischen denen ausschließlich Kräfte wirken, die für jedes Teilchenpaar nur vom Abstand abhängen?

(c) Das mathematische Pendel als Funktion der Auslenkung θ des Pendels.

(d) Das sphärische Pendel als Funktion der Polarkoordinaten (θ, ϕ).

(e) Der Fliehkraftregler als Funktion der Auslenkung θ der Kugeln.

(f) Zeigen Sie: Für die Fälle (a)–(d) stimmt die Hamilton-Funktion mit der Gesamtenergie (d.h. kinetische plus potentielle Energie) überein. Für (e) gilt dies nicht mehr. Was unterscheidet diese Systeme?

(Bonus) Für (a)–(e) kann man die Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ einfach durch die Impulse $\vec{p}$ und Koordinaten $\vec{q}$ ausdrücken. Diskutieren sie das Doppelpendel als Beispiel für einen Fall, in dem das nicht so einfach möglich ist.

Bonus. Geometrische Interpretation der Legendre-Transformation.
Eine weiterführende Diskussion zur Bedeutung und geometrischen Interpretation der Legendre-Transformationen können sie nachlesen in

Royce K.P. Zia, Edward F. Redish, Susan R. McKay:
Making sense of the Legendre transform
American Journal of Physics 77 (2008) 614
`https://doi.org/10.1119/1.3119512`