Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 17. 12. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 11. Probleme mit Zwangsbedingungen

1. Maximale Oberfläche für Quader mit gegebenem Volumen.

Wir betrachten einen Quader. Das Volumen V und die Oberfläche A sind dann Funktion der Kantenlängen a, b und c

$$V(a,b,c) = a\,b\,c$$
$$A(a,b,c) = 2\,(a\,b + a\,c + b\,c)$$

(a) Bestimmen Sie den Quader mit extremaler Oberfläche bei vorgegebenem Volumen durch Diskussion des folgenden Variationsproblems

$$0 = \delta\Big(A(a,b,c) + \lambda\,V(a,b,c)\Big)$$

(b) Welches Resultat erhält man für das Extremum des Volumens bei vorgegebener Oberfläche?

(Bonus) Was ändert sich, wenn man das Volumen durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufspannt?

2. Maximaler Flächeninhalt bei gegebenem Umfang.

Wir betrachten ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$, dessen Berandung in Polarkoordinaten durch die Funktion $R(\phi)$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $A[R(\phi)]$ und der Umfang des Gebietes $U[R(\phi)]$ gegeben sind durch

$$A[R(\phi)] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\; R^2(\phi)$$
$$U[R(\phi)] = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\; \sqrt{R^2(\phi) + \left(R'(\phi)\right)^2}$$

Der Akzent $'$ bedeutet hier eine Ableitung nach ϕ.

(b) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem für die Minimierung des Umfangs bei vorgegebener Fläche auf folgende Differentialgleichung führt

$$R(\phi)\,R''(\phi) = R^2 + 2\left(R'(\phi)\right)^2 + \lambda\;\left[R^2(\phi) + \left(R'(\phi)\right)^2\right]^{3/2}$$

(c) Das Resultat aus (b) legt nahe, dass es eine Familie von Funktionen $R(\phi)$ gibt, die das Variationsproblem lösen. Eine triviale Lösung sind Kreise mit festem Radius R_0, derart dass $\lambda R_0 = -1$ und $R'(\phi) = R''(\phi) = 0$. Um zu verstehen, was es mit den anderen Lösungen auf sich hat betrachten wir Lösungen, die sich nur wenig vom Kreis unterscheiden, $R(\phi) = R_0 + \epsilon(\phi)$. Zeigen Sie, dass man dann in linearer Ordnung in $\epsilon(\phi)$, $\epsilon'(\phi)$ und $\epsilon''(\phi)$ die folgende Differentialgleichung findet

$$\epsilon''(\phi) = -\epsilon(\phi)\,.$$

Was sagt Ihnen dies über potentielle andere Lösungen des Variationsproblems?

3. Ein Rad auf einer schiefen Ebene.

Wir betrachten ein aufrecht stehendes Rad, dass auf einer schiefen Ebene rollt. Die kinetische Energie, potentielle Energie und die Zwangsbedingungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_2}{2}\dot{\phi}^2 \\ V &= mgd\, y \\ 0 &= \mathrm{d}x - R\,\cos\phi\,\mathrm{d}\theta \\ 0 &= \mathrm{d}y - R\,\sin\phi\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

(a) Finden Sie heraus, was die unterschiedlichen Größen bedeuten und skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der Größen.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\theta}$ und $\ddot{\phi}$, sowie die beiden Gleichungen, die die Zwangsbedingungen repräsentieren.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem: Bestimmen Sie dazu zunächst $\phi(t)$. Danach bestimmen Sie $\theta(t)$, indem Sie die beiden Lagrange-Multiplikationen mithilfe der Gleichungen für $\ddot{x}(t)$ und $\ddot{y}(t)$ eliminieren. Schlussendlich verwenden Sie die Gleichungen für die Zwangsbedingungen, um $x(t)$ und $y(t)$ zu bestimmen. **Hinweis:** Die Gleichungen für die Zwangsbedingungen habe ich in der Vorlesung vorgestellt.

Weihnachtsbonus. Biegen und Brechen — Fliegen und Fallen.

Suchen Sie unter Weihnachtsgeschenken (Schwerkraft-Nussknacker), kleinen Missgeschicken (kippende Koffer, fallende Brote) und Aktivitäten zwischen den Jahren (Skispringen, Snakeboard, Trampolin) nach Bewegungsabläufen, die eine Anwendung des Lagrange-Formalismus sehr schön illustrieren. Dokumentieren Sie das Problem mit einem Photo oder Video. Schicken Sie mir Ihre Beschreibung und die theoretische Behandlung des Problems. Von den Zusendungen, die bis zum 3. Januar eingehen, werde ich die drei coolsten Beispiele in der Vorlesung vorstellen!

— Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr —