Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
K. Kroy, J. Vollmer

Wintersemester 2018/19
Mo, 10. 12. 2018

Theoretische Physik I. Mechanik

Blatt 10. Rotation, Reflektion, Stabilität

1. Bälle werfen.

Wir betrachten die Reflektion eines Flummis vom Boden, von unten an einem Tisch und zurück—wie in der Vorlesung vorgeführt. Der Flummi habe Kugelform mit Radius R, Masse m und Hauptträgheitsmoment $m\alpha R^2$. Die Geschwindigkeit zu Beginn nennen wir $\dot{\vec{z}}_0$. Der Spin beim Abwurf sei $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$. Die Geschwindigkeit und Spin nach der n-ten Kollision nennen wir $\dot{\vec{z}}_n$ und $\vec{\omega}_n$. Der Einfluss der Gravitation auf die Flugbahnen wird in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt. Die Flugbahn zwischen den Kollisionen verläuft gerade.

(a) Skizzieren Sie den Aufbau für die erste Kollision. Die positive x-Achse verläuft parallel zum Boden und der Koordinatenursprung soll in dem Punkt liegen, bei dem der Ball auf den Boden trifft. Benennen Sie die Größen, die Sie benötigen, um den Drehimpuls bezüglich des Koordinatenursprungs zu diskutieren.

(b) Für $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$ verläuft die Trajektorie in der x-y-Ebene; bei geeigneter Wahl von y. Welche Wahl von y? Wieso gilt dies?

(c) Während der Kollision wirkt eine Kraft normal zum Boden, $\vec{F}_\perp$, und eine Kraft tangential zum Boden, $\vec{F}_\parallel$. Die Rotation des Balles wird verändert durch die Tangentialkraft $\vec{F}_\parallel$. Die Normalkraft $\vec{F}_\perp$ hat denselben Effekt, wie bei einem Punktteilchen: Die Geschwindigkeitskomponente in Vertikalrichtung ändert das Vorzeichen. Die Geschwindigkeitskomponente in horizontaler Richtung nennen wir im folgenden $v_n = \hat{x} \cdot \dot{\vec{z}}$. Zeigen Sie, dass nun die Energieerhaltung und die Drehimpulserhaltung folgende Gleichungen implizieren

$$v_n^2 + \alpha R^2 \omega_n^2 = v_{n+1}^2 + \alpha R^2 \omega_{n+1}^2$$
$$v_n - \alpha R\, \omega_n = v_{n+1} - \alpha R\, \omega_{n+1}\,.$$

Zeigen Sie, dass daher die Tangentialgeschwindigkeit des Balles am Berührungspunkt bei der Kollision ebenfalls das Vorzeichen wechselt,

$$v_n + R\, \omega_n = -(v_{n+1} + R\, \omega_{n+1})\,.$$

(d) Bestimmen Sie aus diesen Gleichungen $v_1(v_0, \omega_0)$ und $\omega_1(v_0, \omega_0)$. Um im nächsten Schritt $v_2(v_1, \omega_1)$ und $\omega_2(v_1, \omega_1)$ zu bestimmen, muss man zunächst das Koordinatensystem ändern, so dass die Kollision wieder im Ursprung stattfindet. Was hat das für Auswirkungen auf v_1 und ω_1? Iterieren Sie nun weiter und plotten Sie v_1, v_2 und v_3 als Funktion von α. Interpretieren Sie das Resultat für eine Vollkugel (welchen Wert hat dann ω?) und eine Kugel mit $\omega = 1/3$.
Hinweis: Für das Plotten können Sie die Rekursion numerisch auswerten. Die Ausdrücke brauchen nicht explizit ausgerechnet zu werden.
Bonus 1: Wie lässt sich die zweite Kugel in der Praxis realisieren?
Bonus 2: Was ändert sich, wenn der Ball zu Beginn einen Spin hat? Unterscheiden Sie die Fälle eines Spins in $\hat{z}$-Richtung und in Flugrichtung.

2. Klötzchen werfen.

Wir betrachten den Flug eines Gegenstandes mit drei unterschiedlichen Hauptträgheitsmomenten I_α, $\alpha = 1 \dots 3$. Als konkretes Beispiel denken wir and einen Quader (d.h. ein *Klötzchen*, eine Dose oder eine Streichholzschachtel) mit drei unterschiedlichen Kantenlängen. Zur Beschreibung der Rotation verwenden wir die Euler-Gleichungen

$$\dot{\omega}_\alpha = \sum_{\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta\, \omega_\gamma\, \frac{I_\gamma}{I_\alpha}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegung um jede der Hauptträgheitsachsen ein Fixpunkt der Bewegung ist.

(b) Wir diskutieren die Stabilität der Bewegung um die dritte Achse. Die Abweichung vom Fixpunkt $(0, 0, \omega)$ nennen wir $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3 - \omega)$. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Störung in linearer Ordnung, $\dot{\vec{\varepsilon}} = \mathsf{L}\, \vec{\varepsilon}$.

(c) Diskutieren Sie die Eigenwerte von L. Für welche Rotationsachsen ist der Flug stabil? Wann ist er instabil?

(d) Wann wächst die Instabilität besonders schnell? Gibt es eine maximale Rate mit der sie anwächst? Welchen Wert erhält man für eine Streichholzschachtel? Macht es einen Unterschied, ob sie (ganz!) voll oder leer ist?

3. Kreisel drehen.

In der Vorlesung haben wir die Bewegung eines Kreisels diskutiert, der an einem Ende an einem Faden aufgehängt ist und dessen Achse senkrecht zur Gravitation steht. In dieser Aufgabe untersuchen wir, was mit einem Kreisel geschieht der senkrecht auf einem Tisch steht: Die Rotationsachse $\vec{\omega}$ ist parallel zur Gravitationsrichtung $\hat{z}$ ausgerichtet und direkt unterhalb des Scherpunktes ist ein Punkt an der Achse räumlich fixiert. Wenn der Spin groß genug ist, dreht sich der Kreisel stabil. Wenn er zu klein (geworden) ist, fängt er an zu trudeln und fällt dann bald um. Probieren Sie das aus und schauen Sie was passiert.

(a) Es sei nun also $\vec{e}_3$ parallel zu $\hat{z}$. Zeigen Sie, dass $\dot{\omega}_3 = 0$ ist aufgrund der Symmetrie des Kreisels.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\hat{z} = (0, 0, 1)$ ein Fixpunkt der Bewegungsgleichungnen ist. Wir untersuchen die linear Stabilität dieses Punktes. Es seien mithin ω_1, ω_2, $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ klein. Zeigen Sie: Die Ableitung $\dot{z}_3$ ist quadratisch in den kleinen Abweichungen. Abweichungen von z_3 treten erst in quadratischer Ordnung in den Gleichungen für ω_1, ω_2, $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ auf. Daher wird die Stabiltät des Fixpunktes durch ein Gleichungssystem folgender Form beschrieben,

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & C \\ -A & 0 & -C & 0 \\ 0 & -1 & 0 & B \\ 1 & 0 & -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Konstanten A, B und C in dieser Gleichung.
Hinweis: A und B sind proportional zu ω und C hängt nicht von ω ab.

(c) Zeigen Sie: Für große ω sind die Eigenwerte der Stabilitätsmatrix rein imaginär. Was heißt hier groß? Was bedeutet dies für die Stabilität der Bewegung?

(d) Zeigen Sie: Für kleine ω gibt es Eigenwerte positivem Realteil. Was heißt hier klein? Was bedeutet dies für die Stabilität der Bewegung?

Bonus. Eier drehen.

Wussten Sie schon: Gekochte Eier erkennt man daran, dass sie sich auf die Spitze stellen, wenn man sie rotiert!

siehe dazu: Rod Cross: *Why does a spinning egg rise?*
Eur. J. Phys. 39 (2018) 025002
`https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa997b`