

# Theoretische Physik I. Mechanik

## Probeklausur

### Infos zur Probeklausur

Diese Klausur soll in 90 Minuten während der Übung bearbeitet werden. Dies entspricht vom Umfang der Hälfte der Klausur. Sie sollten einen Eindruck vermitteln zu einer Aufgabe mit Schwerpunkt Reproduktion und einer Transferaufgabe. In der Klausur wird es zwei Aufgaben mit Schwerpunkt Reproduktion, eine Transferaufgabe, sowie Fragen zu allgemeinen Konzepten in der Theoretischen Mechanik geben. Die Rückmeldungen zu der Probeklausur werde ich beim Erstellen der Klausuren berücksichtigen. Bei der Klausur werde ich persönlich anwesend sein.

### Anweisungen zum Bearbeiten einer Klausur

1. Erklären Sie, was Sie tun: Welche Annahmen machen Sie? Was soll gezeigt werden?
2. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
3. Beschriften Sie alle Blätter oben links mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und oben rechts mit laufenden Nummern.
4. Bei der Klausur wird auch das Aufgabenblatt wie folgt ausgefüllt und mit abgegeben.

---

Name, Vorname

---

Matrikelnummer

1						2						
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	B	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	B

---

Gesamtpunktzahl

---

Note

## 1. Reproduktion: Eine pendelnde Feder.

Ein Teilchen der Masse  $m$  ist mit einer Feder der Federkonstante  $k$  an einem Haken befestigt, so dass es im Gravitationsfeld frei pendeln kann. Es gibt also zwei Beiträge zur potentiellen Energie.

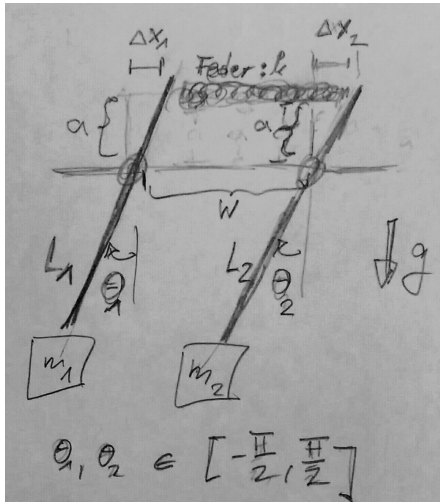
- Die Ruhelänge der Feder, d.h. wenn keine Kraft angreift, sei  $L$  und die Position des Teilchens geben wir in Kugelkoordinaten  $(R(t), \theta(t), \phi(t))$ . Skizzieren Sie das physikalische Problem mit Benennung der relevanten Parameter und Koordinaten.
- Als Anfangsbedingung wählen wir die Position  $(L, \theta_0, 0)$  und Geschwindigkeit Null. Die Bahn des Teilchens verläuft dann in einer Ebene. Welche Ebene ist dies? Warum muss das so sein?
- Bestimmen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Teilchens.
- Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen für  $\theta$  und  $R$  mittels des Lagrange-Formalismus.

Bonus. Bestimmen Sie auch die Bewegungsgleichung für  $\phi$  und verifizieren Sie das Resultat aus Aufgabenteil (b).

- Ermitteln Sie die zu  $R$  und  $\theta$  kanonisch konjugierten Impulse und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.

Bonus. Was erwarten Sie: Ist die Bewegung dieses Pendels chaotisch? Begründen Sie Ihre Antwort!

## 2. Transfer: Gekoppelte Pendel.



Wir betrachten zwei Pendel, die in einem Abstand  $W$  nebeneinander an einem horizontalen Balken befestigt sind. Der Aufbau ist in der nebenstehenden Skizze dargestellt. In einem Abstand  $a$  über dem Balken sind die Pendelarme mittels einer Feder der Federkonstante  $k$  und Ruhelänge  $W$  gekoppelt: Unabhängig von der Auslenkung der Pendel liegt die Feder immer horizontal im Abstand  $a$  über dem Balken und die Auslenkung der Feder wird durch die Abstände  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  festgelegt. Unten an den Pendelarmen sind im Abstand  $L_1$  und  $L_2$  von der Aufhängung jeweils Gewichte mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  befestigt. Die Masse der Arme soll gegenüber der der Gewichte vernachlässigt werden. Die Auslenkung der Arme bezüglich der Richtung senkrecht nach unten bezeichnen wir als  $\theta_1$  und  $\theta_2$ .

- Zeigen Sie, dass die potentielle Energie von folgender Form ist

$$V(\theta_1, \theta_2) = c_1 \cos \theta_1 + c_2 \cos \theta_2 + c_3 (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2$$

Wie hängen die Konstanten  $c_1, \dots, c_3$  von den Modellparametern  $m_1, M_2, a, L_1, L_2, W, k$  und  $g$  ab?

- (b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen für  $\theta_1$  und  $\theta_2$ .
- (c) Ermitteln Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . Bei geeigneter Wahl der Konstanten  $\lambda, \mu, \phi$  und der Zeitskala nehmen sie folgende Form an

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+\phi) & 1 \\ \mu\lambda & -\lambda(\mu+\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbb{A} \vec{\theta}$$

Bonus. Die Zeitskala und die Konstanten  $\lambda, \mu, \phi$  sollen positiv und reell sein. Wie hängen sie von den Modellparametern ab?

- (d) Die Matrix  $\mathbb{A}$  hat zwei Eigenvektoren  $\hat{e}_\pm$  mit Eigenwerten  $\gamma_\pm$ . Zeigen Sie, dass der Ansatz  $\vec{\theta}(t) = \theta_+(t) \hat{e}_+ + \theta_-(t) \hat{e}_-$  auf folgende Differentialgleichungen führt

$$\ddot{\theta}_\pm(t) = \gamma_\pm \theta_\pm(t)$$

- (e) Wir untersuchen im folgenden die Lösungen für  $\lambda = \mu = 1$ . Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von  $\mathbb{A}$  dann negativ sind und dass daher  $\theta_\pm(t) = A_\pm \cos(\omega_\pm(t - t_\pm))$ . Wie stehen  $\omega_\pm$  und  $\gamma_\pm$  in Beziehung?
- (f) Aufgrund von  $\vec{\theta}(t) = \theta_+(t) \hat{e}_+ + \theta_-(t) \hat{e}_-$  und  $\theta_\pm(t) = A_\pm \cos(\omega_\pm(t - t_\pm))$  ist

$$\vec{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \hat{e}_+ A_+ \cos(\omega_+(t - t_+)) + \hat{e}_- A_- \cos(\omega_-(t - t_-))$$

Zeigen Sie, dass dies Schwebungen der Amplitude von der Form

$$\vec{\theta}(t) = \vec{B} \cos(\Omega(t - t_{\Omega,k})) \cos(\omega(t - t_{\omega,k})) + \vec{C} \sin(\Omega(t - t_{\Omega,k})) \sin(\omega(t - t_{\omega,k}))$$

entspricht. Schreiben Sie dazu die cos/sin-Funktionen als Summen/Differenzen komplexer Exponentialfunktionen und multiplizieren Sie die Ausdrücke, so dass sich jeweils eine Summe von zwei cos-Funktionen ergibt. Wie stehen  $(\Omega, \omega)$  und  $(\omega_+, \omega_-)$  in Beziehung zueinander?

Bonus. Was bedeutet  $\lambda = \mu = 1$  physikalisch? In welchem Limes ergeben sich langsame, besonders beeindruckende Schwebungen? Wie ändert sich dieses Resultat, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  nur wenig von 1 abweichen?