Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 14*

Aufgabe 14.1* [12 Zusatzpunkte]

Ein Rad sei bzgl. eines körperfesten Koordinatensystems beschrieben durch die Massenverteilung

$$\tilde{\varrho}(x,y,z) = \begin{cases} \varrho_0, & \text{falls } r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2 \text{ und } -a \leq z \leq a\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $0 < r < R$ und $a > 0$ vorgegebene Längen sind, und $\varrho_0 > 0$ eine konstante Massendichte. Hier seien die Längen folgendermaßen gewählt: $R = 0,6$m, $r = 0,5$m, $a = 0,1$m . Das Rad habe eine Masse von 20kg. Das Rad befinde sich anfangs auf einer Höhe $h = 10$m über dem Erdboden in Ruhe. Es rolle dann eine schräge Bahn bis zum Erdboden hinunter. Anschließend rollt es auf dem (ebenen) Erdboden weiter. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich der Schwerpunkt des Rades dabei fortbewegt.

Hinweis: Es wird angenommen, dass das Rad rollt ohne zu gleiten, und dass Rollreibung vernachlässigbar ist. Weiter wird angenommen, dass das Rad senkrecht auf der Unterlage steht und die Bewegung effektiv in einer Ebene erfolgt, die zum Erdboden und zur Drehachse des Rades senkrecht verläuft, wobei das Rad auf dem kürzestmöglichen Weg die Schräge herabrollt.

Aufgabe 14.2* [12 Zusatzpunkte]

Es sei der Trägheitstensor $J = (J_{k\ell})$ eines starren Körpers definiert bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$, das im Schwerpunkt des starren Körpers zentriert ist. Der Trägheitstensor $J' = (J'_{k\ell})$ sei bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $(\vec{\eta}_1{}', \vec{\eta}_2{}', \vec{\eta}_3{}')$ definiert, das gegenüber $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3)$ starr verschoben ist, also $\vec{\eta}_j{}' = \vec{\eta}_j + \vec{a}$ mit einem festen Vektor $\vec{a}$. (D.h. das Bezugssystem $(\vec{\eta}_1{}', \vec{\eta}_2{}', \vec{\eta}_3{}')$ ist nicht im Schwerpunkt des starren Körpers zentriert.) Zeigen Sie, dass der *Satz von Steiner* gilt:

$$J'_{k\ell} = J_{k\ell} + M(||\vec{a}||^2 \delta_{k\ell} - a_k a_\ell)\,,$$

wobei M die Gasamtmasse des starren Körpers ist.

/...2

Aufgabe 14.3* [12 Zusatzpunkte]

Es sei $R > 0$ fest vorgegeben und O_R sei die Oberfläche eines Zylinders mit Radius R,

$$O_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}\,.$$

Ermitteln Sie für zwei Punkte P_0 und P_1 auf O_R die Kurve minimaler Länge (Geodäte), die beide Punkte verbindet. Drücken Sie dafür die Länge einer C^2-Kurve $\gamma : [0, 1] \to O_R$, die P_0 und P_1 verbindet, als Funktional zu einer geeigneten "Lagrangefunktion" aus, geben Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen an, und bestimmen Sie die Lösungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\gamma(t = 0) = P_0$, $\gamma(t = 1) = P_1$. Führen Sie dazu Zylinderkoordinaten ein und wählen Sie $P_0 = (R, 0, 0)$ und $P_1 = (R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1, z_1)$. Interpretieren Sie anhand von Skizzen die Geodäten geometrisch, besonders für die folgenden Fälle: (i) $z_1 = 0$, (ii) $\varphi_1 = 0$, (iii) $\pi/2 < \varphi_1 < \pi$, $z_1 > 0$. Was lässt sich hinsichtlich der Eindeutigkeit der Geodäten sagen?

Hinweise:

Die Korrektur erfolgt nur für Studierende, die die zur Modulprüfungszulassung erforderlichen 78 Punkte in den Bearbeitungen zu den Aufgabenserien 1 bis 13 nicht erreicht haben. Für diese Studierenden erfolgt die Korrektur auch nur bis zum Erreichen von 78 Punkten.

Abgabe der Bearbeitungen bis spätestens Donnerstag, 09. Feb. 2017, 11:00 bei Herrn Dr. Schmidt (Postfach im ITP).