

---

## Übungen zur Theoretischen Mechanik Aufgabenblatt 8

---

**Aufgabe 8.1** [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabefrist bis Donnerstag, 15. Dez. 2016, vor Beginn der Vorlesung.]

(A)

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{diff}}(\theta)$  für die Streuung von Teilchen der Masse  $m$  mit vorgegebener asymptotischer einlaufender Energie  $E$  am bindenden Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a} \quad (r > 0) \quad (\text{Yukawa-Potential})$$

wobei  $k$  und  $a$  positive Konstanten sind (in geeigneten Einheiten). Zeigen Sie, dass sich im Limes  $a \rightarrow \infty$  die Rutherford-Streuformel ergibt.

*Hinweis:* Verwenden Sie für den Streuwinkel die Beziehung

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\ell}{r^2 \sqrt{2\mu}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff},\ell}(r)}}$$

wobei  $\ell$  der Drehimpuls der unter  $\theta$  gestreuten Bahnkurve ist. Benutzen Sie den Zusammenhang

$$\ell = \mu b \|\vec{v}\|$$

um die Abhängigkeit  $b = b(\theta)$  des Stoßparameters vom Streuwinkel zu erhalten; dabei ist  $\vec{v}$  die asymptotische Geschwindigkeit der einlaufenden Teilchen.

(B)

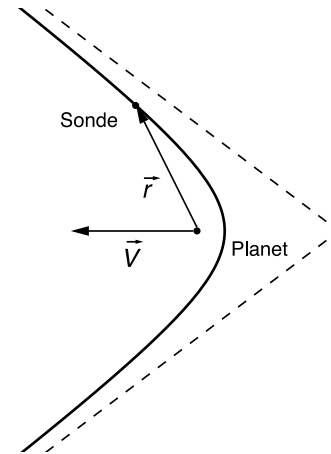
Harte Kugeln mit Radius  $r_p$  und Masse  $m_p$  ("Projektile") werden an einer harten Kugel mit Radius  $R_t$  und Masse  $m_t$  ("Target") elastisch gestreut. Es soll dabei das Reflexionsgesetz gelten, d.h. Einfallswinkel und Ausfallswinkel stimmen dem Betrag nach überein. Berechnen Sie unter dieser Annahme für gegebene asymptotische Energie  $E$  der einlaufenden Projektile den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{diff}}(\theta)$  im Laborsystem, wobei Sie zusätzlich voraussetzen, dass  $m_t$  extrem viel größer ist als  $m_p$ .

/...2

### Aufgabe 8.2

Mit den bisherigen technischen Mitteln der Raumfahrt ist die Beschleunigung von Raumsonden durch das *swing-by* Verfahren von größter Wichtigkeit, damit Raumsonden innerhalb weniger Jahre die äußeren Planeten erreichen oder das Sonnensystem verlassen können. Bei dem swing-by Verfahren fliegt eine Raumsonde nahe an einem Planeten vorbei und wird durch dessen Schwerefeld relativ zur Sonne beschleunigt. Für die Betrachtung der Bewegung der Sonde wird die Anziehungskraft der Sonne (und der anderen Planeten) auf die Sonde vernachlässigt. Im Ruhesystem des betrachteten Planeten beschreibt die Bahn der Sonde dann eine Hyperbel. Die asymptotischen Geschwindigkeiten der Sonde *im Ruhesystem des Planeten* seien  $\vec{w}_-$  (vor dem Vorbeiflug) und  $\vec{w}_+$  (nach dem Vorbeiflug), wie bei der Streuung im Laborsystem.

[wird nicht korrigiert]



Der Planet habe die Masse  $m_2$ . Die Sonde habe die Masse  $m_1$  ( $= \mu$  da  $m_2$  extrem viel größer ist als  $m_1$ ) und *im Ruhesystem des Planeten* die asymptotische einlaufende Energie  $E$  sowie den Drehimpuls  $\vec{\ell}$ . Der Planet habe *im Ruhesystem der Sonne* die Geschwindigkeit  $\vec{V}$ ; für die hier relevanten Zeitskalen kann  $\vec{V}$  als konstant angenommen werden. Der Winkel  $\alpha$  wird definiert durch

$$\vec{w}_+ \cdot \vec{V} = \|\vec{w}_+\| V \cos(\alpha), \quad V = \|\vec{V}\|.$$

Hier wird die symmetrische Situation betrachtet, in der gilt (siehe Skizze):

$$\vec{w}_- \cdot \vec{V} = -\|\vec{w}_-\| V \cos(\alpha).$$

- Es sei  $w = \|\vec{w}_+\|$ . Warum gilt  $\|\vec{w}_-\| = w$ ? Berechnen Sie  $\|\vec{w}_-\|$  aus den gegebenen Größen.
- Zeigen Sie, dass  $\cos(\alpha) = 1/\epsilon$  mit  $\epsilon = \sqrt{1 - E/U_0}$ ,  $U_0 = -\kappa^2 m_1 / (2\ell^2)$  mit  $\ell = \|\vec{\ell}\|$  und  $\kappa = Gm_1 m_2$ , wobei  $G$  die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Eine Skizze kann dabei hilfreich sein.
- Die asymptotischen Geschwindigkeiten der Sonde *im Ruhesystem der Sonne* seien  $\vec{v}_\pm$ . Zeigen Sie  $\|\vec{v}_+\|^2 - \|\vec{v}_-\|^2 = 4wV/\epsilon > 0$ . Was gilt, wenn  $\vec{V}$  durch  $-\vec{V}$  ersetzt wird?
- Argumentieren Sie, dass man bereits ohne Rechnung folgern kann, dass die Energie der Sonde im Ruhesystem der Sonne nicht erhalten ist.

/...3

### Aufgabe 8.3

[wird nicht korrigiert]

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes der Masse  $m$ , der im homogenen Schwerfeld mit  $\vec{g} = -g\vec{e}_3$  an die Oberfläche der Kugel mit Radius  $R$  und Zentrum im Koordinatenursprung gebunden ist, nach der Lagrange-Methode 2. Art. Verwenden Sie dazu die Kugelkoordinaten

$$\vec{x}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ -R \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in [0, \pi), \phi \in [0, 2\pi)),$$

so dass die Bahnkurve des Massenpunktes

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(\theta(t), \phi(t))$$

beschrieben wird durch zeitabhängige Funktionen  $\theta(t)$  und  $\phi(t)$  der Winkelkoordinaten.

- (1) Ermitteln Sie die Differentialgleichungen für  $\theta(t)$  und  $\phi(t)$ , die sich aus der Bewegungsgleichung für den Massenpunkt mit Zwangsbedingungen durch "Projektion auf die Kugeloberfläche" ergeben. Bilden Sie dazu die Skalarprodukte der Bewegungsgleichung mit  $\partial\vec{x}/\partial\theta$  und  $\partial\vec{x}/\partial\phi$ .
- (2) Drücken Sie die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}(t)$  der Bahnkurve des Massenpunktes durch  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$  und deren Zeitableitungen  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  aus, d.h.  $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{w}(\theta(t), \phi(t), \dot{\theta}(t), \dot{\phi}(t))$  mit einer geeigneten vektorwertigen Funktion  $\vec{w} : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit der Bahnkurve des Massenpunktes zu jeder Zeit tangential zur Kugeloberfläche liegt.
- (3) Drücken Sie die kinetische Energie  $T(t)$  und die potentielle Energie  $V(t) = U(\vec{r}(t))$  des Massenpunktes auf der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  durch  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$  und  $\dot{\phi}(t)$  aus.