Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabefrist bis Donnerstag, 07. Dez. 2016, vor Beginn der Vorlesung.]

Zwei ideal harte Kugeln K_1 und K_2 mit den Massen $m_{(1)} \leq m_{(2)}$ und dem Radius $a > 0$ stoßen elastisch zusammen. Der Stoßprozess werde im Laborsystem beschrieben, d.h. K_2 ruhe vor dem Stoß im Ursprung des zugrundeliegenden Inertialsystems, während K_1 sich vor dem Stoß auf K_2 zubewegt.

(a) Es sei $T_{(1)}$ die kinetische Energie von K_1 vor dem Stoß, $T'_{(1)}$ die kinetische Energie von K_1 nach dem Stoß, und $\gamma = \cos\theta$, wobei θ der Streuwinkel ist, sowie $\alpha = m_{(1)}/m_{(2)}$. Zeigen Sie, dass das Verhältnis $T'_{(1)}/T_{(1)}$ der kinetischen Energien von K_1 ausgedrückt werden kann durch

$$T'_{(1)}/T_{(1)} = \frac{2\gamma^2 + \alpha^2 - 1 + 2\gamma\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 - 1}}{(1+\alpha)^2}$$

(b) Gehen Sie spezieller davon aus, dass der Stoßprozess zentral verläuft (zentraler elastischer Stoß), und ermitteln Sie den Energieverlust von K_1 beim einzelnen Stoßprozess. Wenden Sie das Ergebnis auf folgendes Problem an: In einem Kernreaktor entstehen bei der Spaltung von U^{235}-Kernen Neutronen mit einer Energie von etwa 2MeV ($= 2 \cdot 10^6$eV). Wieviele zentrale elastische Stöße mit den als ruhend betrachteten Atomkernen der Moderatorsubstanz (i) Graphit, (ii) Deuterium sind erforderlich, um die Neutronen auf thermische Energie (ca. $0,03$eV) abzubremsen?

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zuerst, dass

$$T'_{(1)}/T_{(1)} = \left(\frac{m_{(2)}}{M}\right)^2 - \left(\frac{m_{(1)}}{M}\right)^2 + \frac{2v'_{(1)}v_{cm}}{v_{(1)}^2}\gamma\,,$$

wobei $v_{(1)} = ||\vec{v}_{(1)}||$, $v'_{(1)} = ||\vec{v}_{(1)}{}'||$, $v_{cm} = ||\vec{v}_{cm}||$ mit $\vec{v}_{cm}$ = Geschwindigkeit des Schwerpunkts der beiden Kugeln, $M = m_{(1)} + m_{(2)}$.

Aufgabe 7.2 [wird nicht korrigiert]

Das Raumschiff der Astronautin Sandy befindet sich auf einer Umlaufbahn um die Erde, deren höchster Punkt (Apogäum) 1000 km und deren tiefster Punkt (Perigäum) 300 km über der

/...2

Erdoberfläche liegen. Als Sandy sich gerade außerhalb des Raumschiffs aufhält, bemerkt sie mit Schrecken, dass ihr Raumschiff vom Trümmerteil eines Satelliten getroffen wird. Dieser Zusammenstoß ereignet sich genau am tiefsten Punkt der Umlaufbahn des Raumschiffs. Nehmen Sie an, dass sich das Trümmerteil unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit genau der entgegengesetzten Geschwindigkeit des Raumschiffs bewegt (die Beträge der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Zusammenstoß sind also gleich) und dass die Masse des Trümmerteils ein Zehntel der Raumschiffmasse beträgt. Der Zusammenstoß von Raumschiff und Trümmerteil soll idealisiert als zentraler inelastischer Stoß beschrieben werden. Sie können benutzen, dass die Geschwindigkeit eines Objekts, das beim zentralen inelastischen Stoß zweier Massen m_1 und m_2 mit den jeweiligen Geschwindigkeiten $\vec{v}_{(1)}$ und $\vec{v}_{(2)} = \alpha\vec{v}_{(1)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ entsteht, gegeben ist durch

$$\vec{v} = \left(\frac{m_1 + \alpha m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_{(1)} \,.$$

(A) Ermitteln Sie, ob der entstehende Klumpen Weltraumschrott aus Raumschiff und Trümmerteil auf die Erde stürzt. Gehen Sie dabei von folgenden vereinfachenden Annahmen aus:

(i) Die Erde wird näherungsweise als in einem Inertialsystem ruhend betrachtet.

(ii) Von allen durch die Erdatmosphäre bedingten Effekten soll abgesehen werden.

(B) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Bahnkurve des Trümmerteils auf, bezüglich kartesischer Koordinaten, die fest mit der Erdoberfläche verbunden sind. Dabei soll die $\vec{e}_1{}'$-Achse in die Richtung von West nach Ost zeigen, die $\vec{e}_2{}'$-Achse von Süd nach Nord, und die $\vec{e}_3{}'$-Achse in radialer Richtung von der Erdoberfläche nach außen. Berücksichtigen Sie den Einfluß von Luftwiderstandseffekten in der Bewegungsgleichung durch einen (nicht näher spezifizierten) Term $\vec{F}_R{}'$. Bezeichnen und erläutern Sie die in der Bewegungsgleichung auftretenden Terme.

Aufgabe 7.3 [wird nicht korrigiert]

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$ ($r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist) gegeben durch

$$U(r) = -\frac{C_1}{r^2} + C_2 \cos(\varrho r)$$

mit positiven Konstanten C_1, C_2 und ϱ (in geeigneten Einheiten).

(a) Je nach Wert des Drehimpulses ℓ ($\ell > 0$ in geeigneten Einheiten) hat das effektive Potential $U_{\mathrm{eff},\ell}(r)$ einen unterschiedlichen Verlauf, wobei es 3 qualitativ unterschiedliche Fälle gibt. Wodurch sind diese Fälle gekennzeichnet? Skizzieren Sie die Graphen von $U_{\mathrm{eff},\ell}(r)$ in den 3 Fällen.

(b) Untersuchen Sie in den 3 Fällen aus (a), ob bzw. für welche Werte der Gesamtenergie E die Teilchen dem Schwerpunkt beliebig nahe kommen.

(c) Untersuchen Sie in den 3 Fällen aus (a), ob bzw. für welche Werte der Gesamtenergie E es finite Bahnkurven gibt, und wo diese lokalisiert sind.