Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabefrist bis Donnerstag, 01. Nov. 2016, vor Beginn der Vorlesung.]

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.

(a) Der Drehimpuls einer finiten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ sei $\vec{\ell} = \ell\vec{e}_3$, $\ell > 0$. Zeigen Sie, dass für die Perihelverschiebung der Bahnkurve die (in der VL ohne Beweis angegebene) Formel

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell}{r^2[E - U_{\mathrm{eff},\ell}(r)]^{1/2}}\,dr$$

gültig ist. Dabei ist E die Gesamtenergie der Bahnkurve und $U_{\mathrm{eff},\ell}(r)$ ist das effektive Potential.

Hinweis: In der Vorlesung wurde für das Newtonsche Potential eine Differentialgleichung angegeben für $\tilde{r}(\varphi)$, den Bahnradius in Abhängigkeit vom Polarwinkel φ. Argumentieren Sie analog für ein allgemeines Potential und ermitteln Sie daraus eine Differentialgleichung für den Polarwinkel in Abhängigkeit des Bahnradius.

(b) Betrachten Sie das Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (r > 0)\,,$$

wobei A und B positive reelle Konstanten (in geeigneten Einheiten) sind, und berechnen Sie die Perihelverschiebung $\Delta\varphi$ für in Abhängigkeit von A und B.

Aufgabe 6.2 [wird nicht korrigiert]

Zwei idealisiert punktartige Massen m und M bewegen sich unter dem Einfluss einer gegenseitigen konservativen Zentralkraft mit dem Potential $U(r)$, $r = ||\vec{r}||$, wobei $\vec{r}$ der Vektor der Relativbewegung ist.

/...2

Der *Runge-Lenz-Vektor* der Bahnkurve der Relativbewegung wird definiert als

$$\vec{A} = \mu\dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} + \mu U(r)\vec{r}\,.$$

Dabei ist μ die reduzierte Masse des Zweiteilchensystems und $\vec{\ell}$ der Drehimpuls der Bahnkurve.

(a) Zeigen Sie für den Fall des *Newtonschen Potentials*

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad (r > 0\,, \quad \kappa \text{ eine positive Konstante in geeign. Einheiten})\,,$$

dass $\vec{A}$ für Lösungen der Bewegungsgleichung zeitlich konstant ist.

(b) Interpretieren Sie $\vec{A}$ für finite Bahnkurven geometrisch und erläutern Sie, weshalb zeitlich konstantes $\vec{A}$ bedeutet, dass keine Periheldrehung auftritt.

(c) Zeigen Sie, dass i.a. für Potentiale $U(r)$, die nicht von der Form des Newtonschen Potentials sind, der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ nicht zeitlich konstant ist.

Aufgabe 6.3 [wird nicht korrigiert]

Die Erde kann als ein Rotationskörper beschrieben werden, dessen Oberfläche $\mathcal{F}$ durch eine Gleichung $z = z(x)$ gegeben wird, wobei x der Abstand von der Drehachse in der Äquatorebene ist. Im Fall einer nicht-rotierenden Erde ist die Oberfläche eine Sphäre vom Radius R, d.h. $z(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

(i) Ermitteln Sie $z = z(x)$ für die rotierende Erde unter Berücksichtigung der durch die Erdrotation hervorgerufenen Zentrifugalkraft, wobei Sie folgendermaßen vorgehen:

(a) Bestimmen Sie ein Potential U_{ges} für die Summe aus Gravitationskraft und Fliehkraft, und bestimmen Sie $z(x)$ aus der Bedingung, dass $\mathcal{F}$ eine Äquipotentialfläche für U_{ges} sein soll. Setzen Sie dabei als Gravitationskraft diejenige an, die eine $kugelförmige$ Erde bei homogener Massenverteilung hätte.

(b) Die Summe aus Gravitationskraft und Fliehkraft steht senkrecht auf $\mathcal{F}$. Der Ansatz für die Gravitationskraft ist wie bei (a).

(ii) Bestimmen Sie daraus die relative Erdabplattung infolge der Erdrotation, also das Verhältnis $a = (R_A - R_P)/R_A$ mit $R_A =$ Abstand von $\mathcal{F}$ vom Erdmittelpunkt am Äquator, $R_P =$ Abstand von $\mathcal{F}$ vom Erdmittelpunkt beim Nord- oder Südpol. Verwenden Sie $R_A = 6378$km.

Aufgrund des Ansatzes für die Gravitationskraft ist a etwa um den Faktor 2 größer als der tatsächliche Wert. Erläutern Sie qualitativ, warum.