Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 [wird nicht korrigiert]

Ein Teilchen mit der Masse m bewege sich unter dem Einfluss einer Zentralkraft der Form

$$\vec{F}(\vec{x}\,) = -k \cdot \vec{x} \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R})$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

(a) Für jede Bahnkurve des Teilchens (Lösung der Bewegungsgleichung) sind die Energie und der Drehimpuls Erhaltungsgrößen.

(b) Die Bahnkurve verläuft in einer festen, zeitunabhängigen Ebene und $\vec{r}(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

(c) Zu den möglichen Bahnkurven gehören Ellipsen mit einem Brennpunkt bei $\vec{x} = \vec{0}$.

(d) Die Umlaufzeiten aller geschlossenen Bahnkurven sind gleich.

(e) An den Punkten mit dem größten Abstand zum Koordinatenursprung ist die Geschwindigkeit des Teilchens am geringsten.

Aufgabe 5.2 [wird nicht korrigiert]

Das Newtonsche Gravitationspotential für eine kontinuierliche (schwere) Massenverteilung, die durch eine stetige Massendichte $\varrho(\vec{x}\,)$ beschrieben wird, ist am Ort $\vec{x}$ gegeben durch

$$U(\vec{x}\,) = -\kappa \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\vec{y}\,)}{||\vec{y} - \vec{x}\,||}\, d^3y\,.$$

Dabei wird angenommen, dass $\varrho(\vec{x}\,)$ so beschaffen ist, dass das Integral für jedes $\vec{x}$ existiert und $U(\vec{x}\,)$ eine C^1-Funktion ist. Dies ist z.B. dann erfüllt, wenn $\varrho(\vec{x}\,)$ stetig von $\vec{x}$ abhängt und wenn es $R_0 > 0$ gibt so, dass $\varrho(\vec{x}\,) = 0$ für all $||\vec{x}\,|| > R_0$.

/...2

(a) Ein Planet sei vereinfacht beschrieben als eine Kugel vom Radius $R > 0$ mit homogener Massenverteilung bei Gesamtmasse M. Zeigen Sie, dass das von dem Planeten im Außenraum hervorgerufene Gravitationsfeld übereinstimmt mit dem Gravitationsfeld, das eine idealisiert im Mittelpunkt des Planeten punktförmig konzentrierte Masse M erzeugen würde.

(b) Nehmen Sie an, dass die Massendichte des Planeten beschrieben wird durch eine stetige Funktion $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r \in [0, R]$ der Abstand vom Mittelpunkt des Planeten ist. Gilt die Aussage, die in (a) gezeigt werden soll, dann auch?

(c) Nehmen Sie an, dass der Außenraum einer leeren Kugel mit dem Radius R mit einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (mit Massendichte $\varrho(r) \geq 0$, wobei $r > R$ der Abstand vom Mittelpunkt der Hohlkugel) erfüllt ist ("Hohlwelt"). Welches Gravitationsfeld ergibt sich im Innenraum der Kugel?

Aufgabe 5.3 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabe bis Donnerstag, 24.11.2016, vor Beginn der Vorlesung]

Ein System aus N Massenpunkten bewege sich bei Abwesenheit äußerer Kräfte unter dem Einfluss gegenseitiger zentraler, konservativer 2-Teilchen-Kräfte. Bezüglich eines Inertialsystems 1 seien $\vec{r}_{(1)}(t) \ldots, \vec{r}_{(N)}(t)$ die Bahnkurven (Lösungen der Bewegungsgleichungen) der Massenpunkte. Zeigen Sie: $\vec{r}'_{(1)}(t) \ldots, \vec{r}'_{(N)}(t)$ sind *genau dann* die Bahnkurven der Massenpunkte bezüglich eines weiteren Inertialsystems 2, wenn es eine Galilei-Transformation gibt, die jedes $\vec{r}_{(j)}(t)$ in $\vec{r}'_{(j)}(t)$ überführt ($j = 1, \ldots, N$), und in diesem Fall bestehen auch bezüglich des Inertialsystems 2 zwischen den Massenpunkten zentrale, konservative 2-Teilchen-Kräft.