Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1 [Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabe bis Donnerstag, 17. Nov. 2016, vor der Vorlesung]

Es sei ein System aus N Teilchen mit Massen $m_{(j)}$ und Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$ gegeben. Wenn $G(t)$ eine mechanische Größe des Systems zur Zeit t ist, dann nennt man

$$\overline{G} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} G(t)\, dt$$

das *zeitliche Mittel* von G (sofern der Limes existiert).

Gehen Sie davon aus, dass es ein Potential $U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$ gibt, so dass die Kraft auf das j-te Teilchen gegeben ist durch $\vec{F}_{(j)} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$.

Für Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$, die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, sei definiert: $T(t) =$ gesammte kinetische Energie des Teilchensystems und $\vec{F}_{(j)}(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{(j)}} U(\vec{r}_{(1)}(t), \ldots, \vec{r}_{(N)}(t))$.

Nehmen Sie an, dass die Bahnkurven für alle Zeiten in einem festen, endlichen Raumbereich bleiben und dass die Geschwindigkeiten aller Teilchen für alle Zeiten einen fest vorgegebenen Wert nicht überschreiten. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen der *Virialsatz* gilt:

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_{(j)} \bullet \vec{F}_{(j)})}\,.$$

Was folgt spezieller in dem Fall, dass U homogen ist vom Grade s, d.h. dass für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$U(\lambda\vec{r}_{(1)}, \ldots, \lambda\vec{r}_{(N)}) = \lambda^s U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)}) \quad ?$$

/...2

Aufgabe 4.2 [wird nicht korrigiert]

Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder konservativ sind, d.h. ob sie ein Potential besitzen. Geben Sie in den entsprechenden Fällen Potentiale an. Die Vektorfelder sind definiert für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sofern sie sich von $\mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig fortsetzen lassen; ansonsten sind sie definiert für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$.

Folgende Bezeichnungen werden verwendet: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $r = ||\vec{x}\,||$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)^T$, $\vec{e}_r = \vec{x}/r$.

$$(a)\ \ \vec{V}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{r^3} \qquad\qquad (b)\ \ \vec{W}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3}{r^3}$$

$$(c)\ \ \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{e}_3}{r^3} - \frac{3x_3\vec{e}_r}{r^4} \qquad\qquad (d)\ \ G(\vec{x}) = \vec{e}_r$$

$$(e)\ \ \vec{L}(\vec{x}) = \left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}, -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, 0\right)^T \qquad\qquad (f)\ \ \vec{M}(\vec{x}) = (x_2, -x_1, 0)^T$$

Aufgabe 4.3 [wird nicht korrigiert]

Ein Hagelkorn bildet sich über Leipzig in 500 m Höhe und fällt auf die Erde. Nehmen Sie an, dass von Luftwiderstandseffekten abgesehen werden kann, und berechnen sie die von der Erdrotation herrührende Abweichung des Aufschlagspunktes auf dem Erdboden gegenüber einer genau vertikalen Bahn (d.h. einer Bahn in radialer Richtung vom Erdmittelpunkt). In welche Richtung (Nord, Süd, Ost, West) erfolgt die Abweichung?

Hinweise: Gehen Sie von folgenden Annahmen aus: (1) Die Erde kann als perfekte Kugel modelliert werden. (2) Eine komplette Erdumdrehung um die (exakte) Nord-Süd-Achse hat die Dauer von genau 86400 Sekunden. (3) Der Erdradius beträgt 6371,0 km. (4) Der Startpunkt des Hagelkorns befindet sich bei $51,3^\circ$ nördlicher Breite, $12,3^\circ$ östlicher Länge. (5) Das Hagelkorn ist zum Zeitpunkt des Entstehens in Ruhe bzgl. eines Inertialsystems, in dem die Erde um die Nord-Süd-Achse rotiert. (6) Die Erdbeschleunigung ist $g = 9,81 m/s^2$. (7) Eine exakte Lösung für die Bewegungsgleichung lässt sich finden, aber es genügt, eine Näherungslösung zu finden; dabei ist zu beachten, dass für die Fallzeit t und die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung ω gilt: $\omega t \ll 1$.