Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1
[Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte. Abgabe bis Do., 10.11.2016, vor der Vorlesung]

Eine Masse (idealisiert punktförmig) von 30 kg sei am Ende eines starren Balkens befestigt. Das andere Ende des Balkens ist in einem Lager angebracht, so dass der Balken in der horizontalen Ebene um die *vertikale* Achse rotieren kann. Vereinfacht sei die Masse des Balkens als vernachlässigbar klein angenommen. Der Balken hat eine Länge von $1,5\,\mathrm{m}$.

(i) Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des Balkens mit Masse wird durch eine Vorrichtung gleichmässig mit einer Rate von $10°$ pro $(\mathrm{sec})^2$ beschleunigt. Berechnen Sie das Drehmoment der Bahnkurve der Masse bezogen auf den Lagerpunkt des Balkens.

(ii) Der Balken rotiere anfangs mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $60°$ pro Sekunde. Der Masse wird zur Zeit t_0 ein Hindernis entgegengestellt, so dass die Drehbewegung innerhalb von $1/100\,\mathrm{sec}$ gestoppt wird. Berechnen Sie das Drehmoment der Bahnkurve der Masse (bezogen auf den Lagerpunkt des Balkens).

(iii) Zusätzlich zu der Masse am Ende des Balkens sei eine weitere (idealisiert punktförmige) Masse von 40 kg an dem Balken angebracht, in einem Abstand von 0,5 m vom Lagerpunkt. Der Balken rotiere anfangs mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $60°$ pro Sekunde. Dem Balken wird zur Zeit t_0 ein Hindernis entgegengestellt, das den Balken in einem Abstand r_0 vom Lagerpunkt trifft und die Drehbewegung innerhalb von $1/100\,\mathrm{sec}$ stoppt. Wie muss r_0 gewählt werden, damit die Belastung des Lagers möglichst gering ist?

Aufgabe 3.2 [wird nicht korrigiert]

Eine Masse (idealisiert punktförmig) von 30 kg sei am Ende eines starren Balkens befestigt. Das andere Ende des Balkens ist in einem Lager angebracht, so dass der Balken in einer vertikal ausgerichteten Ebene um eine *horizontale* Achse rotieren kann. Vereinfacht sei die Masse des Balkens als vernachlässigbar klein angenommen. Der Balken hat eine Länge R (in Metern). Die Anordnung befindet sich im homogenen Schwerefeld der Erde ($g = 9,81\,\mathrm{m}/\mathrm{sec}^2$).

/...2

(1) Berechnen Sie das Drehmoment der Bahnkurve der Masse, bezogen auf den Lagerpunkt, abhängig von der Position der Masse (beschreiben Sie dazu die Bahnkurve der Masse mit Hilfe von ebenen Polarkoordinaten, so dass die Position der Masse bei festem R nur vom Polarwinkel φ abhängt).

(2) Bei $t = 0$ befinde sich die Masse um 5° gegenüber dem tiefstmöglichen Punkt gedreht und in Ruhe, und wird losgelassen. Bestimmen Sie die Differentialgleichung für die Änderung des Drehimpulses der Masse gegenüber der Anfangslage. Vereinfachen Sie diese Differentialgleichung zu einer Schwingungsgleichung durch eine geeignete lineare Näherung.

(3) Bestimmen Sie zu der Anfangsbedingung der Masse in (2) die Zeit t_1, nach der die Masse den tiefstmöglichen Punkt erreicht, in der Näherung der Schwingungsgleichung. Vergleichen Sie dies mit der Fallzeit der Masse von der Ausgangslage bis zum tiefstmöglichen Punkt.

Aufgabe 3.3 [wird nicht korrigiert]

Gegeben seien die Vektorfelder

(1) $$\vec{V}(\vec{x}) = c\vec{x}\,, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

(2) $$\vec{W}(\vec{x}) = a\vec{x}/||\vec{x}||^3\,, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$$

(3)
$$\vec{Y}(\vec{x}) = b \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Dabei sind a, b, c positive Konstanten. Außerdem sind die folgenden Bahnkurven eines Teilchens gegeben:

(a)
$$\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} R\sin(\omega t) \\ R\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \omega t \le 2\pi$$

(b) $$\vec{y}(t) = \vec{k}(t) + 3R\vec{e}_1$$

Dabei sind ω und R strikt positive Konstanten und $\vec{e}_1$ ist der Einheitsvektor in x_1-Koordinatenrichtung.

Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $A_{\vec{r}}(t_2, t_1)$ jeweils für die Bahnkurven $\vec{r} = \vec{k}$ und $\vec{y}$ und die Kraftfelder $\vec{F} = \vec{V}, \vec{W}, \vec{Y}$, wobei $t_1 = 0$ und $t_2 = 2\pi/\omega$ gewählt wird (geschlossene Kurven).