Prof. Dr. R. Verch
Dr. M. Schmidt

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 [wird nicht korrigiert]
Skizzieren Sie schematisch (nicht maßstabsgetreu) die Weltlinien von Erde und Mond während eines Jahres in einem Raum-Zeit-Diagramm bzgl. eines (näherungsweisen) Inertialsystems, in dessen Ursprung die Sonne ruht. Stellen Sie nur die Ekliptik (die Ebene der Bewegung) und die Zeitachse dar. Skizzieren Sie zusätzlich die räumlichen Bahnkurven.

Aufgabe 1.2 [wird nicht korrigiert]
(a) Die Menge (Gruppe) aller n-dimensionalen *orthogonalen* Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet. Sie ist definiert durch

$$D^T D = \mathbf{1} \qquad \text{für jedes } \ D \in O(n),$$

wobei D^T die zu D transponierte Matrix und $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnen. Zeigen Sie, dass für alle $D \in O(n)$ gilt:

$$\det(D) = \pm 1 \quad \text{und} \quad D^T = D^{-1}\,.$$

Eine $O(3)$-matrixwertige Funktion wird durch

$$D_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

definiert, wobei ω eine reelle Konstante ist. Verifizieren Sie, dass für jedes t die Matrix $D_3(t)$ tatsächlich zu $O(3)$ gehört. Zeigen Sie, dass die Wirkung von $D(t)$ auf Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^3$ eine Drehung um die z-Achse ($\vec{e}_3$-Achse) beschreibt.

(b) Es sei $t \mapsto D(t) = (D_{jk}(t))_{j,k=1}^3$ $(t \in \mathbb{R})$ eine C^1 Abbildung von den reellen Zahlen in die Menge der $O(3)$-Matrizen (d.h. alle Matrixeinträge $t \mapsto D_{jk}(t)$ sind einmal stetig differenzierbar).

/...2

Zeigen Sie: Wenn $D(0) = \mathbf{1}$ gilt, dann ist

$$A := \frac{d}{dt} D(t)\bigg|_{t=0}$$

eine antisymmetrische Matrix, d.h. es gilt $A^T = -A$. Prüfen Sie dies für den Fall $t \mapsto D_3(t)$ explizit nach.

Aufgabe 1.3

[Diese Aufgabe wird korrigiert und bewertet, Wert = 12 Punkte.
Abgabefrist für die Lösung bis Do., 28.10.2016, vor Beginn der Vorlesung.]

Es seien D eine Matrix in $O(3)$, $\vec{w}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$, $\beta > 0$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man fasst diese Daten zusammen zu einem Paar $(G, \boldsymbol{g})$, wobei G eine 4×4 Matrix ist und $\boldsymbol{g}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^4$, definiert durch

$$G := \begin{pmatrix} D & \vec{w} \\ \vec{0}^T & \beta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} := \begin{pmatrix} \vec{k} \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Transformation

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ t' \end{pmatrix} = T_{(G,\boldsymbol{g})} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D\vec{x} + t\vec{w} + \vec{k} \\ \beta t + \lambda \end{pmatrix}$$

bezeichnet man dann als *Galilei-Transformation*.

Zeigen Sie, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden. Weisen Sie dazu nach, dass

$$T_{(G_1,\boldsymbol{g}_1)} \circ T_{(G_2,\boldsymbol{g}_2)} = T_{(G_1 G_2, G_1 \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_1)}$$

gilt, und bestimmen Sie das neutrale der Gruppe sowie das Inverse zu $T_{(G,\boldsymbol{g})}$. Interpretieren Sie die Größen β und λ (Hinweis: Für bestimme Werte von β und λ liegt die Situation absolut zeitparametisierter orthonormierter Bezugssysteme vor.)