WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA · JAHRGANG 9 · 1959/60
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE · HEFT 4/5
HERAUSGEBER: DER REKTOR

Als Manuskript gedruckt

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut, Direktor: Prof. Dr. K. Schuster

Über den Begriff der Energie bei gekrümmter Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit

Von

ARMIN UHLMANN

Inhaltsverzeichnis

I. Vorbemerkungen

1. Die Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte

Eine der elementarsten und gleichzeitig allgemeinsten Grundlagen jeder physikalischen Theorie ist die Tatsache, daß unsere Raum-Zeit-Welt eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Nicht nur in den klassischen Theorien, sondern auch in der Quantentheorie gibt es bis heute keinen Begriff, der tragfähig genug wäre, die Raum-Zeit-Welt als nur annähernd gültigen Begriff zu qualifizieren — obwohl es an Versuchen in dieser Richtung nicht fehlt.

Die Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte M ist insofern absolut, als keinerlei Abhängigkeit vom Zustand der Beobachter in diesen Begriff eingeht. Die Relativität von Raum und Zeit entsteht vielmehr erst durch die Vielzahl der möglichen Zerlegungen von M in raumartige Hyperflächen und Bündel zeitartiger Weltlinien.

Die Tatsache, daß M eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wird nun wie folgt ausgedrückt: Zu jedem Punkt Q_0 aus M gibt es eine Umgebung U von Weltpunkten und vier auf U erklärte reelle und stetige Funktionen $x^1, \ldots, x^4$ derart, daß durch

$$Q \to \{x^1(Q), \ldots, x^4(Q)\}, \qquad Q \in U \qquad (1,1)$$

eine eineindeutige Abbildung von U auf eine offene Menge des 4-dimensionalen Zahlenraumes gegeben ist. Vorbehaltlich gewisser Differenzierbarkeitsbedingungen, die wir hier nicht näher erörtern wollen[1]), bilden die vier Funktionen $\{x^i\}$ ein *Koordinatensystem* mit dem *Gültigkeitsbereich* U. Sind $y^1, \ldots, y^4$ irgend vier Funktionen (der Klasse C^∞), die auf einer offenen Teilmenge U von M erklärt sind, so bilden die y^i ein Koordinatensystem $\{y^i\}$ mit dem Gültigkeitsbereich U.

Die Koordinatensysteme auf M haben keinerlei tiefere physikalische Bedeutung. Sie sind lediglich Mittel der Parametrisierung der Mannigfaltigkeit, gewissermaßen „Namen“ oder „Marken“, die den Weltpunkten zu ihrer Unterscheidung gegeben werden[2]).

2. Kovarianz

Der Begriff der Kovarianz ist üblicherweise etwas verschwommen und wird von verschiedenen Autoren verschieden benutzt.

Eine Theorie, ein physikalischer Begriff u. ä. heißt *kovariant* formulierbar, wenn für die Formulierung die Existenz privilegierter Koordinatensysteme nicht notwendig ist. Man sagt hierzu oft auch (etwas vereinfachend), die Theorie sei kovariant, wenn sie „in jedem beliebigen Koordinatensystem formulierbar“ ist.

Eine Theorie kann hiernach kovariant formulierbar sein und gleichzeitig gewisse Koordinatensysteme stark auszeichnen. Die Auszeichnung soll jedoch eine Folge der Theorie sein, nicht ihre Voraussetzung.

Es ist nicht notwendig, daß eine Theorie kovariant formuliert ist: Es langt zu wissen, daß eine kovariante Formulierung möglich ist. Eine „explizite“ kovariante Formulierung bringt jedoch oft Vorteile.

Es hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß eine kovariante Formulierung bei jeder Theorie erzwungen werden kann, und somit dieser Begriff keine tiefere physikalische Bedeutung hat. Dies steht offenbar in engem Zusammenhang mit der analogen Feststellung für die Koordinatensysteme.

Trotz dieser negativen Einschätzung besitzt der Begriff der Kovarianz einen rationalen Kern:

Wir nennen eine Theorie (bzw. einen physikalischen Begriff) *lokal* kovariant, wenn ihre (seine) Formulierung an die Existenz von Koordinatensystemen geknüpft ist, die ganz M zum Gültigkeitsbereich haben. Anderenfalls sprechen wir von *globaler* Kovarianz.

Global kovariant sind z. B. sowohl die Weylsche als auch die Kählersche Formulierung der Maxwellschen Gleichungen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist global kovariant mit Ausnahme der auf Pseudotensoren gegründeten Begriffe Energie, Impuls, Drehimpuls u. ä.[3]).

Allgemein kann gesagt werden, daß die lokale Kovarianz eine im Allgemeinen triviale Angelegenheit ist. Der Forderung nach globaler Kovarianz hingegen kann man einen physikalischen und mathematischen Inhalt zuordnen.

Tatsächlich sind unsere Kenntnisse über die globale Struktur unseres Weltalls äußerst gering und es kann M eine ziemlich beliebige topologische Gestalt haben. Da wir nicht wissen, wie unsere Welt im Großen strukturiert ist, sollte eine Formulierung unserer physikalischen Theorien möglich sein, die von diesen globalen Eigenschaften von M weitgehend unabhängig ist.

Das heißt aber im besonderen, daß eine global kovariante Formulierung existieren und die Definition physikalisch wichtiger Begriffe nicht an den Sonderfall einer topologisch trivialen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit gebunden sein sollte[4]).

Literatur zu I 1. und I 2.:

Alexandrow [2], Newman, E. [10], Dirac [19], Eddington [22], Fock [30—32], Hoffmann, B. [41], Lemaître [57], Møller [65], Pauli [69], Swann [77], Wigner [101] (siehe auch die dortigen Diskussionsbemerkungen von F. Hoyle, D. van Dantzig, J. L. Synge, J. Géniau). Zur globalen Kovarianz der Maxwellschen Gleichungen siehe Kähler [48], Uhlmann [91], Weyl [99].

3. *Die Metrik*

Um auf der Mannigfaltigkeit M Physik treiben zu können, braucht man eine Metrik. Ohne eine Metrik haben z. B. Begriffe wie Länge, Eigenzeit, raumartig, zeitartig usw. keinen Sinn[5]).

Wir sehen schon hieraus, daß das metrische Feld eine Ausnahmerolle in bezug auf alle anderen physikalischen Felder spielt. Dies kann man auch leicht konkret an einzelnen Beispielen zeigen.

Wenn z. B. in der Feldtheorie von „freien Feldern" gesprochen wird, dann ist bei diesen stets eine gewisse „Kopplung" mit dem metrischen Feld eingeschlossen. Diese Kopplung ist sehr komplizierter Art. Von der Metrik ist z. B. abhängig

a) der Laplace-Beltrami-Operator,
b) das „Herauf- und Herunterziehen" von Tensorindizes,
c) der Begriff des Spinors,
d) der Energie-Impuls-Tensor einer jeden Feldtheorie.

Besonders auf den letztgenannten Punkt soll hier die Aufmerksamkeit gelenkt werden: Es geht in den Ausdruck für die Energie nicht nur die Struktur des betreffenden Feldes, sondern auch die der Metrik ein. Es liegt deshalb nahe, in der Existenz des Energie-Impuls-Tensors den Ausdruck der Wechselwirkung des metrischen mit den nicht-metrischen Feldern zu sehen.

Wir wollen unter „Metrik" bzw. „metrischem Feld" einen auf ganz M definierten symmetrischen Tensor g_{ik} vom Typ $(+++-)$ verstehen. Hierin steckt eine gewisse Willkür, da mit gleichem Erfolg der Typ $(---+)$ genommen werden könnte.

Da $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ eine Invariante ist, kann man ihr eine (physikalische!) Dimension zuordnen. Da ds^2 das metrische Feld sein soll, kann dies Dimension nur $[L^2]$ oder $[T^2]$ sein, je nachdem man ds^2 als eine Verallgemeinerung der Form

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

oder

$$\frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 \tag{3,1}$$

ansieht. Wir wollen uns auf den erstgenannten Fall konzentrieren und somit

$$[ds^2] = [L^2] \tag{3,2}$$

schreiben. In diesem Falle sind die g_{ik} dimensionslos, wenn alle Koordinaten die Dimension einer Länge besitzen:

$$[x^i] = [L] \to [g_{ik}] = [1] \tag{3,3}$$

Vom Typ $(+++-)$ sein heißt für eine Metrik, daß es in der Umgebung eines jeden Weltpunktes vier unabhängige Pfaffsche Formen ω_0, ω_1, ω_2 ω_3 mit

$$ds^2 = -\omega_0{}^2 + \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2 \tag{3,4}$$

gibt. Hiermit identisch ist auch die Existenz von „oskulierenden" („Minkowskischen") Koordinatensystemen $\{y^i\}$ in der Umgebung eines jeden Weltpunktes Q: Sind $\bar{g}_{ik}$ die Komponenten bezüglich $\{y^i\}$, so kann

$$\bar{g}_{ik}(Q) = \varepsilon_i\, \delta_{ik}\,, \quad \bar{g}_{ik,l}(Q) = 0 \tag{3,5}$$
$$\text{mit} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_0 = 1$$

erreicht werden.

Im weiteren Verlauf verstehen wir unter einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit (Raum-Zeit-Welt) eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit (der Klasse C^∞) zusammen mit einer auf ganz M erklärten Metrik vom Typ $(+++-)$ und der Dimension $[L^2]$.

Literatur:

Zur allgemeinen Interpretation von M:

Alexandrow [1, 2]; Einstein, A. [24, 25, 28]; Fock [30—32]; Pauli [69]; Uhlmann [95].

Einige zusammenfassende Werke:

Eddington [22]; Einstein [24, 25, 28]; Hoffmann, B. [41]; Jordan [46]; Landau-Lifshitz [55]; Lichnerowicz [58]; Møller [63]; Pauli [69]; Schrödinger [76]; Swann [77]; Trautmann [89]; Weyl [99].

4. *Konventionen, Abkürzungen*

M bezeichne stets die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit und Q ihre Punkte, die „Raum-Zeit-Punkte“ bzw. „Weltpunkte“ genannt werden.

Ein „lateinischer“ Summationsindex $i, k, \ldots$ läuft von 1 bis 4 wenn keine Koordinate und über 0, 1, 2, 3, wenn die „nullte“ Koordinate ausgezeichnet werden soll. „Griechische“ Summationsindizes ν, μ, λ laufen stets von 1 bis 3.

In der Arbeit wird oft vom Kalkül der äußeren Differentialformen Gebrauch gemacht. Das alternierende Produkt wird durch $\wedge$ angezeigt, die totale Differentiation durch d. Der Dualitätsoperator wird mit $\underline{a}$ bezeichnet und durch

$$\underline{a}\,\Theta = \frac{(-1)^{\binom{r}{2}}}{r!\,(n-r)!} A_{i_1 \ldots i_r} g^{i_1 j_1} g \ldots g^{i_r j_r} dx^{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n} \delta^{1\,2 \ldots n}_{j_1 j_2 \ldots j_n} \,|-g|^{\frac{1}{2}}$$

definiert, falls

$$\Theta = \frac{1}{r!} A_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

ist. Dabei ist stets $n = 4$. Insbesondere ist $\underline{a}\,1$ das invariante Volumendifferential von M.

Des weiteren ist es zweckmäßig, für einige häufig gebrauchte Begriffe Abkürzungen einzuführen, um das Satzbild zu entlasten und übersichtlicher zu gestalten. Wir setzen

Spezielle Relativitätstheorie	= SRT
Allgemeine Relativitätstheorie	= ART
Koordinatensystem	= KS
Hyperfläche	= HFl
Weltlinie	= WL

Die Abkürzungen treten auch in Zusammensetzungen auf: HFl-Stück, WL-Bündel.

Ein Formelzitat III (6,3) sagt, daß es sich um die dritte Formel im Abschnitt 6 des dritten Kapitels handelt. Wird die Formel im selben Kapitel zitiert, in dem sie auftritt, so wird das Kapitelzeichen weggelassen — also z. B. (6,3). Wir geben noch einige benutzte mathematische Literatur an:

Mathematische Literatur:

Bochner Yano [12]; Eisenhart [29]; Lichnerowicz [59, 60]; Yano [97, 98]. Für den äußeren Differentialkalkül: Kähler [47, 49]; Lichnerowicz [59]; Uhlmann [92] (insbesondere für die hier benutzten Bezeichnungen und für weitere Zitate).

II. Zur Theorie der Beobachtungen

1. *Allgemeine Voraussetzungen*

Sei M eine Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit mit der Metrik g_{ik}. Außer den durch die Metrik ausdrückbaren objektiven Gegebenheiten mögen noch andere nicht-metrische Felder φ_a vorhanden sein.

Es erhebt sich dann die Frage, wie sich diese als objektiv und real vorausgesetzten Dinge in unserer Beobachtung widerspiegeln können. Es ist dies natürlich ein sehr differenziertes Problem, da jede Situation, jede physikalische Größe ihr eigentümliche individuelle Züge aufweist.

Ehe man aber diese Frage z. B. für die Energie beantworten kann, muß man wissen, wie man die Beobachter in die Theorie einzuführen hat. Dabei verstehen wir unter „Beobachtern“ stets auch die Gesamtheit der Beobachtungsmittel, Meßgeräte usw. Wir treffen hierzu einige allgemeine Feststellungen.

a) Die Beobachtungsmittel verhalten sich wie klassische Objekte. Wir nehmen insbesondere an, daß ihre Bewegung wohldefiniert ist.

b) Die „Bewegung“ der Beobachter in Raum und Zeit wird durch ein Bündel von Weltlinien gegeben, den Weltlinien der Beobachter (Beobachtungsmittel usw.).

Es ist klar, daß jede dieser Weltlinien *zeitartig* sein muß, da jeder Beobachter eine endliche, von der Grenzgeschwindigkeit verschiedene Geschwindigkeit besitzen muß. Das Weltlinienbündel beschreibt den Bewegungsverlauf der Beobachter vollständig.

c) Schließlich müssen noch die Weltpunkte gekennzeichnet werden, an denen die Messung stattfindet. Diese Weltpunkte bilden eine Teilmenge Ω von M.

Natürlich kann ein Weltpunkt nur dann zu Ω gehören, wenn er mit einer der in b) genannten WL koinzidiert.

Im allgemeinen wird man bestrebt sein, Ω als *raumartige* Punktmenge zu wählen, da dann die an verschiedenen Weltpunkten vorgenommenen Messungen voneinander unabhängig sind.

Um schließlich eine maximale Information zu erhalten, wird man sich auf maximale raumartige Punktmengen stützen. Wir nehmen deshalb an, daß Ω ein raumartiges *Hyperflächenstück* ist.

Die Weltlinien der Beobachter verkörpern die kinematische „Geschichte“ der Beobachter. Es ist klar, daß wir für eine Messung in den Punkten Ω einer raumartigen HFl die Struktur dieser WL nur in einer beliebig kleinen Umgebung von Ω zu kennen brauchen. Für die hier betrachteten Größen langt es nun völlig, den Bewegungszustand der Beobachter und die Weltpunkte, an denen die Messung stattfindet, zu kennen. Mit anderen Worten: Die hier betrachteten Observablen kann man als Funktionale dieser „Beobachtungsbedingungen“ und des physikalischen Zustandes (gegeben durch die g_{ik} und φ_a) ansehen.

2. *Die Weltlinien der Beobachter*

Wir betrachten zunächst eine WL w aus dem Bündel der WL der Beobachter. w ist eine Abbildung eines reellen Parameters λ auf gewisse Weltpunkte $Q(\lambda)$ aus M:

$$\lambda \to Q(\lambda) \tag{2,1}$$

Auf w kann nun ein Vektorfeld wie folgt erklärt werden: Die Komponenten ξ^i bezüglich eines beliebigen KS sind an der Stelle $Q = Q(\lambda)$ durch

$$\xi^i = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^i(Q(\lambda + \varepsilon)) - x^i(Q(\lambda))}{\varepsilon} \tag{2,2}$$

gegeben.

Nun ist freilich der Parameter λ noch beliebig. Wird er durch einen anderen $\mu = \mu(\lambda)$ ersetzt, so entsteht statt ξ^i das durch $\bar{\xi}^i \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = \xi^i$ gegebene Vektorfeld $\bar{\xi}^i$.

Das gesamte WL-Bündel, das ein gewisses Gebiet von M überdecken mag, definiert dort durch den eben beschriebenen Prozeß ein kontravariantes Vektorfeld ξ^i. Die Willkür der Parameterwahl kommt dadurch zum Ausdruck, daß die Vektoren ξ^i und die Vektoren $\alpha \cdot \xi^i$ (α ist eine bel. Funktion) dem gleichen WL-Bündel zugeordnet sind.

Auf der anderen Seite bestimmt jedes solche Vektorfeld ξ^i das Weltlinienbündel vollständig. Es sind nämlich die einzelnen WL $Q(\lambda)$ durch

$$x^i\,(Q\,(\lambda)) = \varphi^i\,(Q, \lambda) \tag{2,3}$$

gegeben, wobei die Funktionen φ^i die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{d\lambda}\,\varphi^i\,(Q, \lambda) = \xi^i\,(\varphi^1, \ldots, \varphi^4) \tag{2,4}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi^i\,(Q, 0) = x^i\,(Q) \tag{2,5}$$

sind. (Vgl. hierzu auch IV. 5.)

An die Stelle des mathematisch nicht so handlichen WL-Bündels sind somit die zu ihm „assoziierten" kontravarianten Vektorfelder ξ^i, $\alpha \cdot \xi^i, \ldots$ getreten.

Unbequem ist nun lediglich noch die Willkür in der Wahl des Parameters λ, die den willkürlichen Faktor α bedingt. An dieser Stelle erinnern wir uns daran, daß die WL zeitartig sind. Wir wählen deshalb den Parameter gerade so, daß

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \int\limits_{Q(\lambda_1)}^{Q(\lambda_2)} ds \tag{2,6}$$

ist. Dann mißt λ/c^2 gerade die *Eigenzeit* der WL und wir haben die physikalisch klare Forderung zu stellen, daß der Parameter einer jeden WL gerade die Eigenzeit des zu dieser WL gehörenden Beobachters als λ/c^2 bestimmt.

Damit dies der Fall ist, muß

$$d\lambda = ds \tag{2,7}$$

werden, wenn wir

$$x^i\,(\lambda) = x^i\,(Q(\lambda)) \tag{2,8}$$

in das Linienelement eintragen. Aus

$$ds = \sqrt{-g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k}\,d\lambda = \sqrt{-g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k}\,d\lambda \tag{2,9}$$

folgt, daß unsere Forderung mit

$$\xi^i\,\xi_i = -1 \tag{2,10}$$

gleichbedeutend ist.

Durch unsere Forderung, daß dem kontravarianten Vektorfeld ξ^i die auf die Eigenzeit der Beobachter bezogene Parameterdarstellung des WL-Bündels zugrunde liegt, ist ξ^i bis auf ein Vorzeichen bestimmt; denn mit ξ^i erfüllt auch $-\xi^i$ (2,10). Wir können jedoch annehmen, daß (wenigstens lokal) infolge der Kausalitätsrelationen eine Ordnung der Punkte von w eintritt. Wir dürfen deshalb voraussetzen, daß Wirkungen nur in Richtung wachsender Parameterwerte fortgepflanzt werden. Wir sagen dann, daß das Feld ξ^i *vorwärts gerichtet* sei. Zusammengefaßt:

Zu jedem zeitartigen Weltlinienbündel gehört genau ein kontravariantes Vektorfeld ξ^i mit

$$\xi_i\,\xi^i = -1\,,$$

ξ^i ist vorwärts gerichtet und umgekehrt. Die zugehörige Parameterdarstellung hat die c^2-fache Eigenzeit als Parameter und die Richtung sich ausbreitender Wirkungen wird durch wachsende Parameterwerte angezeigt. Wir bezeichnen die so gewählten ξ^i als die zum Weltlinienbündel gehörenden *normierten Tangenten.*

Betrachten wir eine zeitartige WL $\overline{w}$, die wir als WL eines kleinen Teilchens ansehen und eine aus dem WL-Bündel der Beobachter herausgegriffene WL w. Im Weltpunkt Q mögen sich w und $\overline{w}$ schneiden. In diesem Punkt seien ξ^i und η^i die zugehörenden normierten Tangenten. Wir wählen ein KS derart, daß

$$ds^2(Q) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 \tag{2,11}$$

ist und in dem der auf w befindliche Beobachter ruht:

$$\xi^\nu(Q) = 0, \quad \xi^0(Q) = \frac{1}{c}$$

Ist $\overline{w}$ in der Nähe von Q durch $x^\nu = x^\nu(t)$ gegeben, so ist

$$\eta^1 = \alpha \cdot v_x\,,\ \ \eta^2 = \alpha \cdot v_y\,,\ \ \eta^3 = \alpha \cdot v_z\,,\ \ \eta^0 = \alpha\,,$$

und der Proportionalitätsfaktor ist durch die Normierung zu

$$-\alpha^2(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2 - c^2) = -\alpha^2\,(v^2 - c^2) = 1$$

festgelegt. Also ist

$$\xi^i\,\eta_i(Q) = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{2,12}$$

und der „Kosinus des Winkels" zwischen w und $\overline{w}$ bestimmt durch diese Formel die vom Beobachter auf w gemessene Geschwindigkeit des Teilchens mit der Weltlinie $\overline{w}$.

3. *Die raumartigen Hyperflächenstücke*

Wir wenden uns nunmehr dem zweiten Teil der raum-zeitlichen Beobachtungsbedingungen zu, den raumartigen HFl-Stücken. Die übliche Definition der SRT, nach der zwei Punkte raumartig zueinander liegen, wenn ihr „Abstand" positiv ist, versagt freilich bei genügend allgemeiner Gestalt von M. Er ist auch lokal viel zu kompliziert, um für die Definition grundlegender Begriffe verwendbar zu sein. Da aber Ω ein Hyperflächenstück ist, kann man leicht eine Definition angeben, die im Falle Minkowskischer Metrik mit der in der SRT üblichen Bestimmung dieses Begriffes zusammenfällt:

Ω heiße *raumartig*, wenn jede ganz in Ω verlaufende WL nur raumartige Tangenten besitzt.

Dies ist gleichbedeutend mit jeder der folgenden Bedingungen:

a) Ist Ω durch eine Gleichung $f = 0$ gegeben, so ist das Vektorfeld $\partial f/\partial x^i$ zeitartig.

b) Ist $\{x^i\}$ ein KS derart, daß $x^0 = 0$ eine Gleichung für Ω ist, so ist $g_{\nu\mu}$ auf Ω positiv definit.

c) Ist Ω durch eine Parameterdarstellung

$$x^i = x^i\,(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$$

gegeben, so ist die Form

$$g_{ik}\,\frac{\partial x^i}{d\lambda^\nu}\,\frac{\partial x^k}{d\lambda^\mu}\,d\lambda^\nu\,d\lambda^\mu$$

positiv definit.

Wegen a) ist das durch

$$\eta_i = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x^i}}{+\sqrt{-\dfrac{\partial f}{\partial x^l}\dfrac{\partial f}{\partial x^j}\,g^{lj}}}$$

gegebene Feld der Normalen einer raumartigen HFl zeitartig. η_i ist hierdurch auf Ω bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Nehmen wir jedoch an, daß f so gewählt ist, daß Ereignisse an Weltpunkten Q mit $f(Q) < 0$ auf gewisse Ereignisse mit Weltpunkten $f(Q) > 0$ wirken können (über Kausalketten), so ist auch dieses Vorzeichen festgelegt und wir sprechen von der nach *vorwärts gerichteten* Normalen von Ω.

Ist η_i vorwärts gerichtet, so ist $-g^{ik}\,\eta_k$ im Sinne des vorhergehenden Abschnittes ebenfalls vorwärts gerichtet.

Lassen wir deshalb eine zeitartige Weltlinie w den „Raum" Ω in einem Weltpunkt Q passieren und ist ξ^i bzw. η^i die vorwärts gerichtete Tangente bzw. Normale in diesem Punkt, so ist wegen (2,12) durch

$$\xi^i\,\eta_i = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3,2}$$

die Relativgeschwindigkeit eines Beobachters bzw. eines Objekts bezüglich Ω gegeben.

Berechnen wir nun auch die Richtung dieser Geschwindigkeit von w relativ Ω und somit das Analogon zum „Dreiervektor" der Geschwindigkeit. Hierzu betrachten wir wieder ein KS $\{x, y, z, t\}$, das im Punkte Q die Relation (2,11) befriedigt und nehmen an, daß die Fläche $t = 0$ unsere Hyperfläche im fraglichen Weltpunkt berührt. Letzteres ist mit

$$\eta_x = \eta_y = \eta_z = 0, \quad \eta_t = c$$

äquivalent. Andererseits ist in diesem KS

$$\xi^x = \frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \ldots, \; \xi^t = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,.$$

Bestimmen wir nun die Projektion α^i von ξ^i auf Ω durch die Gleichungen

$$\xi^i = \lambda\,\eta^i + \alpha^i, \quad \alpha^i\,\eta_i = 0\,. \tag{3,3}$$

Es folgt

$$\alpha^x = \frac{v_x}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \ldots, \; \alpha^t = 0\,. \tag{3,4}$$

Schließlich treffen wir die folgende Verabredung, die später nicht mehr explizit angegeben wird: Hängt eine Größe neben anderem von einer Hyperfläche ab $\Phi = \Phi[\Omega, \ldots]$, so bedeutet die Redeweise „Φ ist von der Wahl der raumartigen HFl unabhängig" genauer eine Wahl von Ω innerhalb einer Homologieklasse und die Unabhängigkeit von Φ bei Variation von Ω innerhalb dieser Homologieklasse. Bei den bisher näher betrachteten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten spielt dies jedoch keine oder nur eine untergeordnete Rolle (mit Ausnahme der Wheelerschen „Wurmlochtheorie").

4. *Interpretation der Daten ξ^i und Ω*

Wir nehmen nun ein zeitartiges Bündel von WL w mit normierten Tangenten ξ^i an, das eine raumartige HFl Ω durchsetzt. Die WL seien die WL der Beobachtungsmittel, und beim Passieren von Ω werde gemessen.

Hat das Feld ξ^i in den Punkten von Ω die Richtung der (vorwärts gerichteten) Normalen η_i von Ω

$$\xi^i + g^{ik}\,\eta_k = 0\,, \tag{4,1}$$

so „ruhen" die Beobachter relativ zu Ω; denn die Projektion von ξ^i auf Ω ist in diesem Falle Null, und daher ist die Geschwindigkeit der Beobachter — bezogen auf den „Raum Ω" — Null.

Der durch (4,1) gekennzeichnete Fall ist offenbar der wichtigste und in der Praxis fast immer mit ausreichender Genauigkeit verwirklichte. Bei ihm werden vom Standpunkt der Eigenzeit die Meßgeräte gleichzeitig eingeschaltet, und sie befinden sich überdies vom Standpunkt des Raumes Ω in Ruhe.

Es hindert uns jedoch nichts, auch die allgemeine Situation

$$\xi^i + g^{ik}\,\eta_k \neq 0 \tag{4,2}$$

zu betrachten. Sie liegt z. B. vor, wenn wir im Tomonaga-Schwinger-Formalismus die auf ein Inertialsystem bezogene Energie durch ein Integral über eine *beliebige* raumartige HFl ausdrücken. Überdies muß gesagt werden, daß eine Beschränkung auf (4,1) schon deshalb nicht immer ratsam ist, weil für manche Weltlinienbündel (4,1) gar nicht realisiert werden kann.

Um nämlich (4,1) erfüllen zu können, müssen wir die Existenz von Funktionen f und h mit

$$\xi^i = h\cdot g^{ik}\,\frac{\partial f}{\partial x^k} \tag{4,3}$$

voraussetzen. Die Integrabilitätsbedingung für diese Gleichung ist

$$\vartheta \wedge d\vartheta = 0 \quad \text{mit} \quad \vartheta = \xi^i\,g_{ik}\,dx^k \tag{4,4}$$

Ein kosmologisches Beispiel für die Nichterfüllung von (4,4) ist das Gödelsche Modell des „rotierenden Universum". Dort gibt es ein zeitartiges Weltlinienbündel, das sogar zur Bewegungsgruppe der Metrik gehört und (4,4) verletzt.

Jedoch kann man bereits in der SRT beliebig viele Beispiele konstruieren, bei denen (4,4) nicht erfüllt ist. Interpretiert man dann die zugehörenden Weltlinien als WL von Beobachtern, so gibt es keine HFl, relativ zu der sich die Beobachter in Ruhe befinden. Das heißt für solche Scharen von Beobachtern gibt es keine sinnvolle Definition der Gleichzeitigkeit.

[Umgekehrt kann man für eine Schar von Beobachtern genau dann eine sinnvolle Definition der Gleichzeitigkeit festlegen, wenn die zugehörenden WL die Gleichung (4,4) erfüllen.]

Wir betrachten nun den Fall, daß (4,2) und nicht (4,1) gilt. Wir haben diese Situation so zu interpretieren, daß entweder die Beobachter relativ zu Ω bewegt sind, oder daß die Meßapparatur, vom Standpunkt der Beobachter aus beurteilt, nicht gleichzeitig eingeschaltet wurde. Beide Deutungen sind gleichwertig: Die erste beurteilt die Situation vom Standpunkt einer zweiten Schar von Beobachtern, die relativ zur betrachteten HFl ruht. Die zweite urteilt über die Situation vom Standpunkt der zu dem fraglichen WL-Bündel gehörenden Beobachter aus.

Wir bringen zwei einfache Beispiele aus dem Bereich der SRT.

Beispiel 1:

Die Weltlinien von Beobachtern, die sich in einem Inertialsystem befinden, sind natürlich durch

$$x = \text{const.},\ \ y = \text{const.},\ \ z = \text{const.},\ \ t = \lambda,$$
$$-\infty < \lambda < +\infty$$

gegeben. (4,1) entspricht dann der Wahl einer HFl. $t = \text{const.}$ Führen wir jedoch die Messung so aus, daß sie von relativ zu diesem Inertialsystem bewegten Beobachtern als gleichzeitig wahrgenommen wird, so liegt (4,2) vor. Der hier einfachste Fall ist die Wahl einer HFl Ω durch die Gleichung

$$c^2\, t + v\, x = \text{const.}$$

Es ist dann

$$\xi^i = \delta_0{}^i \frac{1}{c}, \quad \eta_1 = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad \eta_2 = \eta_3 = 0,$$
$$\eta_t = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

so daß wir wie erwartet

$$\xi^i\, \eta_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

erhalten.

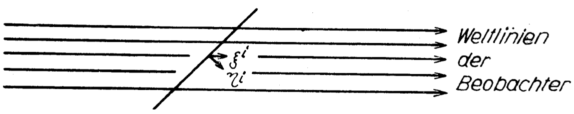

Abb. 1

Beispiel 2:

Hier betrachten wir eine „Meßapparatur", deren einzelne Teile sich gegeneinander bewegen (vom Standpunkt eines Inertialsystems aus betrachtet). Als einfaches Modell nehmen wir etwa die Molekeln eines Gummibandes, das ausgedehnt aber nicht verbogen wird. Wir haben dann das folgende Schema:

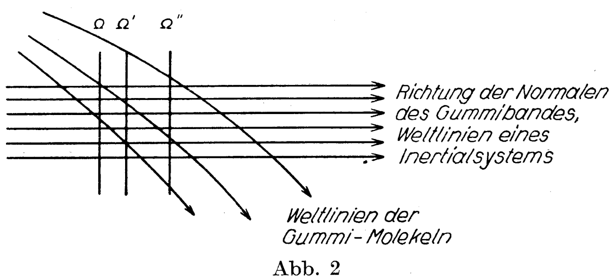

Abb. 2

Wir kommen nun nochmals auf die Bemerkung zurück, daß für die Messung an den Weltpunkten einer raumartigen HFl die Kenntnis des WL-Bündels nur in einer beliebig kleinen Umgebung dieser HFl benötigt wird. Eine nicht wesentlich stärkere Aussage ist, daß das Meßergebnis nur von den Werten der Tensoren

$$\xi^i(Q),\ \ \partial^k \xi^i(Q),\ \ \partial^{k_1} \partial^{k_2} \xi^i(Q), \ldots; \quad Q \in \Omega, \tag{4,5}$$

genommen an den Punkten der HFl, abhängt.

Hängt jedoch der Wert einer physikalischen Größe eines physikalischen Systems nur von der (relativen) Geschwindigkeit der Beobachter ab, so heißt das, daß die Werte

$$\partial^k \xi^i(Q),\ \ \partial^{k_1} \partial^{k_2} \xi^i(Q), \ldots$$

für die Ermittlung dieser physikalischen Größe ohne Bedeutung sind. In diesem Falle ist die Angabe der Beobachtungsbedingungen durch die Angabe von Ω und der Vektoren

$$\xi^i(Q), \qquad Q \in \Omega \tag{4,6}$$

vollständig erschöpft. *Nach Aussagen der SRT ist die Energie gerade eine solche Größe.*

Betrachten wir als ein anderes Beispiel hierfür die Messung von Rauminhalten.

Sei Ω ein beliebiges HFl-Stück. Als eine bestimmte Menge von Weltpunkten aus M hat Ω ein ganz bestimmtes Volumen im Sinne der Metrik von M. Ist nämlich $\{x^i\}$ ein KS derart, daß $x^0 = 0$ eine Gleichung für Ω ist, so ist

$$V(\Omega) = \int_\Omega dV \tag{4,7a}$$

mit

$$dV = \sqrt{\operatorname{Det}(g_{\nu\mu})}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{4,7b}$$

Ist Ω raumartig und η_i das nach vorwärts gerichtete Normalenbündel von Ω, so kann man hierfür auch

$$V(\Omega) = -\int_\Omega \eta_i\, \underline{a}\, dx^i \tag{4,8}$$

schreiben. Wir wollen nun den Zusammenhang von $V(\Omega)$ mit den Messungen von Beobachtern herstellen. Dazu nehmen wir an, daß die normierten Tangenten ξ^i der Beobachter die Integrabilitätsbedingung (4,4) erfüllen. Wir haben dann folgendes Bild:

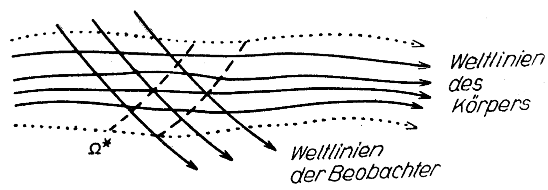

Abb. 3

Die gestrichelt gezeichneten HFl-Stücke werden begrenzt durch die punktiert gezeichneten Weltlinien des Randes des auszumessenden Körpers. Diese „gestrichelten" HFl-Stücke sind so gewählt, daß die Beobachter relativ zu ihnen in Ruhe sind. Dies ist wegen der Voraussetzung (4,4) möglich.

Wegen $\eta_i{}^* = -g_{ik}\, \xi^k$ und (4,8) ist dann das Volumen eines solchen HFl-Stückes gerade

$$V(\Omega^*) = \int_{\Omega^*} \xi^i\, g_{ik}\, dx^k. \tag{4,9}$$

Wir wollen nachweisen, daß das von den ξ^i-Beobachtern gemessene Volumen für den Körper gerade $V(\Omega^*)$ ist. Hierzu betrachten wir dasselbe Bild nochmals und zeichnen noch die HFl-Stücke Ω_0, Ω'_0, ein, die zu Beobachtern gehören, die relativ zum auszumessenden Körper in Ruhe sind:

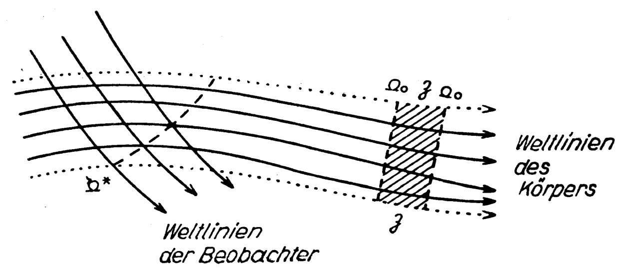

Abb. 4

Offenbar sind die WL dieser Beobachter mit denen des Körpers identisch und deshalb wird das Volumen, das von ihnen gemessen wird, gleich

$$V(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} \Theta, \quad \Theta = \alpha^i\, g_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k \qquad (4{,}10)$$

sein. Dabei sind die α^k die nach vorwärts gerichteten normierten Tangenten des Körpers.

Ehe wir nun (4,9) mit (4,10) vergleichen, wollen wir die Frage beantworten, wann

$$V(\Omega_0) = V(\Omega_0{}')$$

ist, d. h. die mit dem Körper bewegten Beobachter die Erhaltung des Volumens wahrnehmen.

Bezeichnet M_0 das schraffierte Raum-Zeit-Gebiet, so ist

$$\int_{M_0} \mathrm{d}\Theta = \int_{\Omega_0'} \Theta - \int_{\Omega_0} \Theta + \int_{\mathfrak{Z}} \Theta,$$

wobei $\mathfrak{Z}$ der Zylindermantel der Weltlinien des Randes des Körpers zwischen Ω_0 und $\Omega_0{}'$ ist. Für die Normalen von $\mathfrak{Z}$ gilt auf Grund der Konstruktion natürlich $\alpha^i\,\beta_i = 0$. Hieraus aber folgt, daß $\Theta = 0$ auf $\mathfrak{Z}$ ist. Deshalb ist

$$V(\Omega_0{}') - V(\Omega_0) = \int_{M_0} d\,\Theta = \int_{M_0} (\partial_i\, \alpha^i)\, \underline{a}\, 1\,. \qquad (4{,}11)$$

Notwendig und hinreichend für die Volumenerhaltung ist somit die Divergenzfreiheit der normierten Tangenten des WL-Bündels des Körpers:

$$\partial^i\, \alpha_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad d^{\underline{a}}\, (\alpha_i\, d\,x^i) = 0 \qquad (4{,}12)$$

Nun kehren wir zu dem beliebig bewegten Beobachtern zurück und nehmen an, daß (4,12) erfüllt ist. Wegen $\Theta = 0$ auf $\mathfrak{Z}$ kann man auch

$$\int_{\Omega^*} \Theta = V(\Omega_0)$$

schließen. Nun ist

$$V(\Omega^*) = \int_{\Omega^*} \xi^i\, g_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k = \int_{\Omega^*} \lambda \cdot \alpha^i\, g_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k,$$

wobei λ durch

$$\xi^i = \lambda\, a^i + \gamma^i \ \text{ mit } \ \xi^i\, \gamma_i = 0$$

bestimmt ist. Es ist deshalb

$$-1 = \lambda\, \xi_i\, \alpha^i = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

wobei v die (räumlich und zeitlich im allgemeinen veränderliche) Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und den durch ξ^i gegebenen Beobachtern ist. Somit folgt

$$V(\Omega^*) = \int_{\Omega^*} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; \Theta \leq \int_{\Omega^*} \Theta = V(\Omega_0)\,. \qquad (4{,}13)$$

Ist überdies $v =$ konst. auf Ω^*, so folgt die geläufigere Formel

$$V(\Omega^*) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; V(\Omega_0) \qquad (4{,}14)$$

Es ist klar, daß sich die Verhältnisse bei der Volumenmessung komplizieren, wenn sich das Eigenvolumen ändert, d. h. (4,12) nicht erfüllt ist. Übrigens sieht man nachträglich, daß bei erhalten bleibendem Eigenvolumen die Integrabilitätsbedingung (4,4) für die Beobachter ungangen werden kann.

5. *Bemerkung über Koordinatensysteme*

Sei $\{x^i\}$ ein KS, von dem wir annehmen wollen, daß das Vektorfeld grad x^0 zeitartig ist. (Dies ist eine echte Beschränkung, die keineswegs immer durch Umnumerierung der Koordinaten zu erreichen ist.) Dann ist das durch

$$x^\nu = \text{const.}, \quad x^0 = \text{variabel} \qquad (5{,}1)$$

definierte WL-Bündel zeitartig.

Sei $\{y^i\}$ ein zweites KS. Wann sind dann die beiden nach der Vorschrift (5,1) gebildeten Weltlinienbündel im gemeinsamen Definitionsbereich beider KS gleich? Offenbar muß, da $d\,x^\nu$ und $d\,y^\mu$ längs der WL verschwinden, wegen

$$d\,y^\nu = \frac{\partial\, y^\nu}{\partial\, x^\mu}\, d\,x^\mu + \frac{\partial\, y^\nu}{\partial\, x^0}\, d\,x^0$$

$\partial\, y^0 / \partial\, x^0$ identisch verschwinden; denn die WL überdecken ja den gesamten gemeinsamen Gültigkeitsbereich der beiden KS. Es folgt, daß

$$y^\nu = f^\nu (x^1, x^2, x^3) \qquad (5{,}2)$$

sein muß. Weiter: grad x^0 und grad y^0 sind nach Voraussetzung (nicht notwendig normierte) Tangentenfelder zum gleichen WL-Bündel. Beide Gradienten können sich deshalb nur um eine nichtverschwindende Funktion x unterscheiden. Das heißt es muß

$$d\,y^0 = \alpha\, d\,x^0, \qquad \alpha \neq 0$$

sein. Aus dieser Gleichung folgt wegen $d\,d\,y^0 = 0$ sofort $\partial\alpha / \partial\, x^\nu = 0$, und deshalb ist $\alpha = h'\,(x^0)$ bzw. $y^0 = h\,(x^0)$. Damit sind die angenommenen Voraussetzungen ausgeschöpft: Notwendig und hinreichend dafür, daß die KS $\{x^i\}$ und $\{y^i\}$ in ihrem gemeinsamen Gültigkeitsbereich gemäß (5,1) dasselbe WL-Bündel bestimmen, sind die Transformationsformeln

$$y^\nu = f^\nu\,(x^1, x^2, x^3) \qquad (5{,}2)$$

$$y^0 = h\,(x^0) \qquad (5{,}3)$$

mit beliebigen Funktionen f^ν und h.

Wir berechnen nun die Geschwindigkeit der Beobachter relativ zu den Flächen $x^0 =$ const. ($y^0 =$ const. liefert dieselben HFl!). Das Normalenbündel dieser Flächen ist bezüglich des KS $\{x^i\}$ durch

$$\eta_i = \delta_i{}^0\, (-\,g^{00})^{-\frac{1}{2}}$$

und das Feld der normierten Tangenten der WL durch

$$\xi^i = \delta_0{}^i \, (-g_{00})^{-\frac{1}{2}}$$

gegeben. Also ist

$$\eta_i \, \xi^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (g^{00} \, g_{00})^{-\frac{1}{2}} \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = g_{00} \, g^{00} \tag{5,4}$$

Man sieht, daß das durch $\{x^i\}$ definierte WL-Bündel genau dann die zugehörenden HFl-Stücke orthogonal schneidet, und somit $v = 0$ ist, wenn

$$g_{\nu 0} = 0 \tag{5,5}$$

gilt. Der für v in (5,4) angegebene Wert ist natürlich gegenüber einen Koordinatenwechsel (5,2) bzw. (5,3) invariant.

Betrachten wir nun weiter den zeitlichen Abstand zweier HFl-Stücke $x^0 = 0$ und $x^0 = \lambda$, d. h. die Eigenzeit, die für einen Beobachter verstreicht, wenn er sich auf einer Weltlinie (5,1) zwischen diesen beiden HFl. bewegt. Auf den ersten Blick ist klar, daß im allgemeinen diese Zeit von WL zu WL variieren wird. Es ist nämlich

$$\tau = \frac{1}{c^2} \int ds = \frac{1}{c^2} \int\limits_{x^0=0}^{\lambda} \sqrt{-g_{00}} \, d\,x^0, \tag{5,6}$$

und selbstverständlich ist g_{00} im allgemeinen von $\{x^\nu\}$ abhängig.

Damit also (5,5) erfüllt ist und die Eigenzeit vom Beobachter unabhängig wird, muß das Weltlinienbündel durch ein KS definiert werden können, in dem die Metrik die Gestalt

$$ds^2 = g_{\nu\mu} \, d\,y^\nu \, d\,y^\mu - (d\,y^0)^2 \tag{5,7}$$

annimmt. Hierdurch ist übrigens y^0 bis auf das Vorzeichen bestimmt, das noch durch die Forderung normiert werden kann, daß wachsende y^0-Werte zu zukünftigen Weltpunkten gehören. Damit dann zwei KS sowohl dasselbe WL-Bündel definieren als auch (5,7) erfüllen, muß zwischen ihnen die Transformationsvorschrift

$$\bar{y}^\nu = f^\nu \, (y^1, y^2, y^3)$$
$$\bar{y}^0 = y^0 \tag{5,8}$$

bestehen. Es mißt dann y^0 die Eigenzeit der zu den Weltlinien gehörenden Beobachter.

Wir bemerken, daß auch wenn die Form (5,7) erreicht ist, die Beobachter im allgemeinen keine „kräftefreie" Bewegung ausführen. Hängt nämlich $g_{\nu\mu}$ von y^0 ab, so ist die Bewegung der Beobachter beschleunigt. (Siehe hierzu III. 5.)

Wir wollen nun aus obigen Darlegungen eine wichtige Schlußfolgerung für beobachtbare physikalische Größen ziehen. Sei A eine physikalische Größe, die außer von gewissen Feldfunktionen usw. noch vom Bewegungszustand der Beobachter und von den Weltpunkten abhängt, an denen die Messung ausgeführt wurde. Konzentrieren wir uns besonders auf die Abhängigkeit vom Bewegungszustand der Beobachter und schreiben die anderen Abhängigkeiten nicht explizit auf:

$$A = A\,[\xi^i] \tag{5,9}$$

Nehmen wir nun an, daß an Stelle der ξ^i-Abhängigkeit eine Abhängigkeit von einem KS steht, wie das noch meist üblich ist:

$$A = A\,[\{x^i\}]\,. \tag{5,10}$$

Damit dann die physikalische Größe A einem System von Beobachtern *eindeutig* zugeordnet werden kann — was offenbar eine Minimalforderung dafür ist, daß A als Observable gelten kann — muß die Abhängigkeit (5,10) eine Abhängigkeit (5,9) induzieren.

Diese Forderung aber bedeutet, daß (5,10) *invariant* gegenüber einem Koordinatenwechsel (5,2) und (5,3) sein muß.

Dies ist übrigens eine *sehr* minimale Forderung. Sie erlaubt, daß A an den Meßpunkten von den Werten aller Ableitungen (4,5) abhängen darf. Hängt A jedoch nicht von allen Tensoren (4,5), sondern nur von (4,6) ab (= nur die Relativgeschwindigkeiten spielen eine Rolle), so müssen wir viel allgemeinere Koordinatenwechsel zulassen. Diese werden dann nur durch die Forderung

$$\frac{\partial\, y^0}{\partial\, x^0}\,(Q) = 0 \qquad \text{für } Q \in \Omega \tag{5,11}$$

eingeschränkt.

Betrachten wir als eine Konkretisierung des obigen Vorgehens die Annahme, daß die Energie durch einen Ausdruck der Form

$$E = -\int\limits_{x^0=\text{const.}} \mathfrak{T}_0{}^0 \, d\,x^1 \, d\,x^2 \, dx^3 = \int\limits_{x^0=\text{const.}} h \; d\,V \tag{5,12}$$

dargestellt werden soll mit einer affinen Pseudotensordichte, die die Gleichung $\mathfrak{T}^i{}_{j,\,i} = 0$ erfüllt. Soll (5,12) invariant gegenüber beliebigen Koordinatenwechsel der Form (5,2) und (5,3) sein, so muß dies auch auf die Funktion h zutreffen[6]).

Entspringt nun die Funktion h wie angenommen einem affinen Pseudotensor, so gilt das schöne Resultat von Møller, daß es genau eine Pseudotensordichte gibt, die in (5,12) in Betracht gezogen werden könnte und gleichzeitig ein h liefert, daß bezüglich (5,8) invariant ist. Unter der Annahme (5,5) wird insbesondere für diesen Møllerschen Pseudotensor

$$h = \frac{2}{\varkappa} \, \Delta \sqrt{-g_{00}}\,, \tag{5,12a}$$

wobei Δ der Laplace-Operator des Unterraumes $x^0 = \text{const.}$ ist. Dieser Ausdruck ist nun invariant gegenüber einem Koordinatenwechsel (5,8) aber *nicht* gegenüber der Kombination (5,2) und (5,3), wie sofort zu sehen ist. (Man wähle z. B. $y^0 = \lambda \cdot x^0$.)

Deshalb gibt es keinen Ausdruck für die Energie, der einem affinen Pseudotensor entspringt und auf die Gestalt (5,9) *gebracht werden kann.*

Allerdings beschränkt sich der Møllersche Eindeutigkeitsbeweis auf Fälle, bei denen die Ableitungen des metrischen Tensors in höchstens zweiter Ordnung auftreten. Es erscheint jedoch unwahrscheinlich, daß dies eine wesentliche Beschränkung sein könnte.

Als eine gewisse Kuriosität merken wir noch an: Wenn wir die Bewegungszustände der Beobachter so beschränken, daß zu ihnen stets ein KS gefunden werden kann, für das (5,7) gilt, so können wir tatsächlich bereits aus einer Invarianz (5,8) auf eine Darstellbarkeit (5,9) schließen. Dies ist jedoch kein Ausweg, da für solches KS die Møllersche Energiedichte h im ganzen Gültigkeitsbereich des KS identisch verschwindet!

Wir wollen nur kurz vermerken, daß der von einigen Autoren (z. B. Møller) versuchte Ausweg, aus dem Koordinatendilemma durch Verwendung lokaler Riemannscher Normalkoordinaten herauszukommen, ebenso hoffnungslos sein dürfte. Diese KS hängen bekanntlich von einem willkürlich wählbaren Weltpunkt, dem „Koordinatenmittelpunkt" zusätzlich ab. Durch ihre Verwendung wird daher die Überbestimmung der pseudotensoriellen Energieausdrücke, die von der Unerfüllbarkeit der Invarianzforderungen (5,2) und (5,3) herrührt, auf einen zusätzlichen Parameter geschoben, eben auf den Koordinatenmittelpunkt des KS.

Es verbleibt nun noch die Notwendigkeit, auf die Inertialsysteme der SRT einzugehen. Ist $\{x^i\}$ ein Lorentz-KS, so liegt natürlich die Metrik in der Form (5,7) vor, und die durch

$$x^\nu = \text{const.}, \quad x^0 = \text{var.} \qquad (5,13)$$

definierten Weltlinien sind das WL-Bündel von Beobachtern, die sich in einem Inertialsystem befinden. In einem Lorentz-KS messen *sämtliche* Koordinaten Weltabstände und alle ihre Parameterlinien sind überdies geodätisch. Aus diesen Umständen erklärt sich die besondere Bedeutung und Stellung solcher KS. Seien nun ξ^i die normierten Tangenten der WL (5,13). Dann haben wir für das Lorentz-KS ($x^0 = ct$ gesetzt)

$$\xi^i = \delta_0{}^i.$$

Es folgt, daß in diesem System

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, \xi^i = 0$$

ist. Da für die Minkowski-Metrik die kovariante Ableitung in einem Lorentz-KS mit der gewöhnlichen Ableitung zusammenfällt, gelten die kovarianten Gleichungen

$$\partial_k\, \xi^i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial^k\, \xi^i = 0\,. \qquad (5,14)$$

Nennen wir ein Vektorfeld, das die Gleichungen (5,14) erfüllt, *konstant*, so gilt:

Jedem Inertialsystem der SRT entspricht genau ein zeitartiges konstantes und normiertes Vektorfeld. Jedes konstante zeitartige Vektorfeld definiert ein Inertialsystem.

Der letzte Teil dieser Behauptung ergibt sich so: Sei ξ^i zeitartig und konstant. Dann ist $\partial_l\, \xi^i\, \xi_i = 0$ und somit $\xi^i\, \xi_i$ eine Konstante. Durch eventuelle Multiplikation mit einer reellen Zahl kann man deshalb $\xi_i\, \xi^i = -1$, ξ^i vorwärts gerichtet, voraussetzen. Nun wählen wir einen Weltpunkt Q beliebig aus und bestimmen ein Lorentz-KS $\{x^i\}$ so, daß in ihm $\xi^i\,(Q) = \delta_0{}^i$ ist. Da ξ^i konstant ist, gilt in diesem KS $\xi^i{}_{,l} = 0$ bzw. $\xi^i = \text{const.}$ Folglich ist $\xi^i = \delta_0{}^i$ und ξ^i das normierte Tangentenfeld des zum Lorentz-KS gehörenden WL-Bündels. Es ist klar, daß $\{x^i\}$ bis auf eine Transformation

$$x^\nu = a_\mu{}^\nu\, \hat{x}^\mu,$$
$$x^0 = \hat{x}^0$$

bestimmt ist. Eine solche Transformation führt ja auch nicht aus einem Inertialsystem heraus.

Literatur:

Cattaneo [15, 16, 17]; Dirac [19]; Hoffmann, B. [41]; Lemaître [57]; Møller [63]; Newman [67]; Pauli [69]; Takeno, Uenno [80]; Uhlmann [93]; Wigner [101]; De Witt [102].

Zum Gödelschen Universum: Gödel [35].

Zum Tomanaga-Schwinger-Formalismus: Schwinger [78, 79]; Tomonaga [83, 84].

Zu Møllers Energiedefinition: Møller [64, 65, 66].

Zu Møllers Eindeutigkeitssatz: Møller [64]; Uhlmann [94].

Vgl. auch die unter I genannte Literatur.

III. Die Energie

1. Mathematische Hilfsbetrachtungen

Wir beginnen damit, einige für das Folgende und auch für spätere Zwecke wichtige Formeln herzuleiten.

Sei Ω ein raumartiges Hyperflächenstück, ξ^i ein kontravariantes Vektorfeld und A_{ik} ein kovarianter Tensor.

Wir betrachten dann das Integral

$$A = -\int_\Omega \xi^i\, A_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k. \qquad (1,1)$$

Als erstes formen wir (1,1) etwas um: Sei $\{y^i\}$ ein KS derart, daß Ω in seinem Definitionsbereich durch $y^0 = \text{const.}$ gegeben ist und daß außerdem $g_{\nu 0} = 0$ gilt. Da die Formen $\underline{a}\, d\, y^\nu$ dann auf Ω verschwinden, ist

$$A = -\int_\Omega \xi^i\, A_{i0}\, \underline{a}\, d\, y^0.$$

Bedenken wir nun, daß für die Komponenten des Normalenfeldes von Ω in diesem KS

$$\eta_i = \delta_i{}^0 \sqrt{-g^{00}}, \quad \eta^i = -\delta_0{}^i \sqrt{-g_{00}}, \quad \eta^k\, \eta_i = -\delta_0{}^k\, \delta_L{}^0$$

gilt, so finden wir durch Einsetzen leicht die Formel

$$A = -\int_\Omega \xi^i\, A_{ik}\, \eta^k\, d\, V(\Omega) \qquad (1,2)$$

Dabei bezeichnet $d\, V(\Omega)$ das zu Ω gehörende Invariante Volumenelement:

$$d\, V(\Omega) = -\, \eta_i\, \underline{a} d\, y^i. \qquad (1,3)$$

Nun betrachten wir noch die Zahl A^*, die entsteht, wenn man in (1,1) das HFl-Stück Ω durch ein anderes Ω^* ersetzt. Wir wollen dabei annehmen, daß Ω und Ω^* den Rand eines 4-dimensionalen Raum-Zeit-Gebietes M_0 bilden. Nach dem allgemeinen Satz von Stokes ist dann

$$A^* - A = -\int_{M_0} d\,(\xi^i\, A_{ik}\, \underline{a}\, d\, x^k)\,.$$

Zur Auswertung des rechts stehenden Integrals bemerken wir, daß sein Integrand gleich

$$d^a\, \vartheta \cdot d\,V \quad \text{mit} \quad d\,V = \underline{a}\; 1, \quad \vartheta = \xi^i\, A_{ik}\, d\,x^k$$

ist. Nun ist aber

$$d^a\, \vartheta = \partial^k\, (\xi^i\, A_{ik})$$

und somit

$$A^* - A = -\int_{M_0} (A_{ik}\, \partial^k\, \xi^i + \xi^i\, \partial^k\, A_{ik})\, d\,V. \quad (1,4)$$

Erfüllt jetzt der Tensor A_{ik} überdies die Bedingungen

$$A_{ik} = A_{ki}\,, \quad \partial^k A_{ik} = 0\,, \tag{1,5a}$$

so entsteht endlich die Formel

$$A^* - A = -\frac{1}{2}\int\limits_{M_0} A_{ik}\,(\partial^k \xi^i + \partial^i \xi^k)\cdot dV. \tag{1,5b}$$

2. Die Energie in der Speziellen Relativitätstheorie

Die erste Forderung, die wir an jeden Ausdruck für die Energie stellen müssen, ist seine Übereinstimmung beim Vorliegen des Minkowskischen Linienelements mit dem Energieausdruck der Speziellen Relativitätstheorie. Deshalb wenden wir uns jetzt dem letzteren zu. Durch das Einführen der beliebigen raumartigen HFl in die SRT durch Tomonaga und Schwinger sowie durch die Untersuchungen von Trautmann über die „kovariante" Schreibweise des Energieintegrals wurde der Begriff der Energie für Beobachter, die sich in einem Inertialsystem befinden, weitgehend geklärt.

Ist $\{x^i\}$ ein Lorentz-KS, in dem sich die Metrik

$$ds^2 = dx^\nu\, dx^\nu - d\,x^0\, d\,x^0$$

schreibt, ist Ω ein Stück der HFl $x^0 = \text{const.}$, und sind schließlich T_{ik} die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors in diesem KS, so ist bekanntlich

$$E = \int\limits_{\Omega} T_{00}\, d\,x^1\, d\,x^2\, d\,x^3.$$

Das normierte Tangentenfeld ξ^i der mit dem System $\{x^i\}$ verbundenen Beobachter, das Normalenfeld η_i von Ω sowie das invariante Volumenelement von Ω sind nun durch

$$\xi^i = \delta_0{}^i,\ \ \eta_i = \delta_i{}^0,\ \ d\,V\,(\Omega) = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

gegeben. Wir können deshalb zu der vollständig kovarianten Schreibweise

$$E = -\int\limits_{\Omega} \xi^i\, T_{ik}\, \eta^k\, d\,V(\Omega) \tag{2,1}$$

übergehen (beachte $\eta^k + \xi^k = 0$). Dies entspricht der Formel (1,2). Wir können dies weiter in

$$E = -\int\limits_{\Omega} \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k \tag{2,2}$$

umformen (Trautmann). Nun ist T_{ik} ein symmetrischer Tensor, der die berühmte Divergenzrelation befriedigt:

$$T_{ik} = T_{ki}\,, \quad \partial^k T_{ik} = 0\,. \tag{2,3}$$

Da ξ^i zu einem Inertialsystem gehört, ist $\partial^k \xi^i = 0$. Für zwei beliebige HFl Ω_1 und Ω_2 ist somit

$$E = -\int\limits_{\Omega_1} \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, dx^k = -\int\limits_{\Omega_2} \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k \tag{2,4}$$

nach Formel (1,5). Bekanntlich drückt eine Formel der Gestalt (2,4) einen Erhaltungssatz aus — den Satz von der Erhaltung der Energie im vorliegenden Fall. (Eine derartige Formulierung der Erhaltungssätze wurde von Tomonaga und Schwinger eingeführt.)

Betrachten wir nun eine beliebige raumartige HFl $\overline{\Omega}$. Infolge des Erhaltungssatzes (2,4) hat man den von den in Rede stehenden (in einem Inertialsystem befindlichen) Beobachtern beim Passieren von $\overline{\Omega}$ gemessenen Energiebetrag mit

$$E = -\int\limits_{\overline{\Omega}} \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, dx^k$$

anzugeben. Infolge der Gleichwertigkeit der Formeln (1,1) und (1,2) wird man deshalb den Ausdruck

$$u = -\xi^i\, T_{ik}\, \overline{\eta}^k, \tag{2,5}$$

wobei $\overline{\eta}_i$ das Normalenfeld von $\overline{\Omega}$ ist, als die *Energiedichte* anzusehen haben, die die im Inertialsystem befindlichen Beobachter beim Passieren das HFl-Stückes $\overline{\Omega}$ vorfinden. Es ist dies eine Meßanordnung, die in II. 3. im 1. Beispiel erläutert wird. Man beachte auch die Analogie zur Volumenmessung.

Bei gekrümmter Raum-Zeit existieren jedoch im allgemeinen *keine* Scharen von Beobachtern, die ähnlich ausgezeichnet sind wie die Inertialsysteme der SRT. Um deshalb Schlüsse für die ART ziehen zu können, müssen wir das Obenstehende noch etwas verallgemeinern.

Wir betrachten deshalb eine *beliebige* Schar von Beobachtern, die sich nicht notwendig in einem Inertialsystem befinden, und deren normierte Tangenten durch $\overline{\xi}^i$ gegeben sein mögen. Die Messungen sollen wieder an den Weltpunkten eines raumartigen HFl-Stückes stattfinden, dessen Normalenvektorfeld $\overline{\eta}_i$ sei. Wir wählen nun einen beliebigen Weltpunkt Q aus $\overline{\Omega}$ aus und betrachten ein Inertialsystem derart, daß das zugehörende normierte Tangentenbündel ξ^i im Weltpunkt Q gerade die Beziehung

$$\xi^i\,(Q) = \overline{\xi}^i\,(Q)$$

erfüllt, was offenbar immer möglich ist. Die beiden Scharen von Beobachtern haben dann im Weltpunkt Q die Relativgeschwindigkeit Null. Da die Abhängigkeit der Energie vom Beobachter nach all unseren Erfahrungen nur über die Geschwindigkeit vermittelt wird, werden deshalb beide Beobachter in diesem Weltpunkt die gleiche Energiedichte messen!

Die Beobachter im Inertialsystem messen nun die Energiedichte (2,5). Im Punkte Q ist dies aber gerade gleich $-\overline{\xi}^i\, T_{ik}\, \overline{\eta}^k$. Folglich ist die Energie, die von der beliebig bewegten Schar von Beobachtern gemessen wird, gleich

$$\overline{E} = -\int\limits_{\overline{\Omega}} \overline{\xi}^i\, T_{ik}\, \overline{\eta}^k\, d\,V(\overline{\Omega}) = -\int\limits_{\overline{\Omega}} \overline{\xi}^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, dx^k.$$

Das befriedigende Ergebnis unserer einfachen Überlegungen lautet also:

Satz 1:

Besitzt eine Schar von beliebig bewegten Beobachtern das normierte Tangentenfeld ξ^i, so ist der beim Passieren einer raumartigen Hyperfläche Ω gemessene Energiebetrag durch

$$E = -\int\limits_{\Omega} \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, dx^k$$

und die Energiedichte durch

$$u = -\,\xi^i\, T_{ik}\, \eta^k$$

gegeben, wobei η_i das Vektorfeld der Normalen von Ω ist.

3. Der Erhaltungssatz für die Energie in der Speziellen Relativitätstheorie

Befinden sich Beobachter in einem Inertialsystem, so haben wir den durch (2,4) in allgemeinster Form ausgedrückten Erhaltungssatz für die Energie für solche Beobachter vor uns.

Es ist jedoch von vornherein klar, daß beliebig bewegte, d. h. beschleunigte Scharen von Beobachtern keine Energieerhaltung beobachten können. Dies sieht man schon an allereinfachsten Beispielen: Wird ein Massenpunkt der Ruhemasse m_0 von einem Beobachter betrachtet, der relativ zu ihm die Geschwindigkeit v besitzt, so ist für diesen bekanntlich $E = m_0 c^2/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Ändert sich die Geschwindigkeit, d. h. ist der Beobachter nicht unbeschleunigt, so ändert sich auch E. Diese im ersten Augenblick trivial erscheinende Feststellung erhält jedoch besonderes Gewicht, da für ein vom Minkowskischen abweichendes Linienelement oft überhaupt gar keine Scharen von unbeschleunigten Beobachtern existieren und mithin keine Beobachter da sein können, die die Energieerhaltung in ähnlich universeller Weise konstatieren wie die Beobachter in Inertialsystemen der SRT.

Um später nicht gleiche Rechnungen wiederholen zu müssen, nehmen wird an, wir hätten eine beliebige Metrik g_{ik} und ein beliebiges Vektorfeld ξ^i vor uns. Damit für jeden Tensor T_{ik}, der überhaupt alsEnergie Impuls-Tensor auftreten kann, die Größe

$$A\,(\Omega) = -\int\limits_{\Omega} \xi^i\, T_{ik}\, \underset{-}{a}\, dx^k \tag{3,1}$$

einem Erhaltungssatz unterliegt, muß das Vektorfeld gewisse Bedingungen erfüllen. Die Größe $A\,(\Omega)$ „bleibt erhalten" genau dann, wenn sie von der Wahl der HFl unabhängig ist. Da T_{ik} symmetrisch und divergenzfrei sein muß, um als Energie-Impuls-Tensor überhaupt fungieren zu können, muß deshalb nach (1,5)

$$T_{ik}\,(\partial^k \xi^i + \partial^i \xi^k) = 0 \tag{3,2}$$

sein. Wenn wir fordern, daß T_{ik} im Rahmen der Bedingungen (2,3) willkürlich wählbar sein darf, erhalten wir aus (3,2) die schärfere Forderung

$$\partial^k \xi^i + \partial^i \xi^k = 0 \tag{3,3}$$

Das heißt es muß ξ^i ein Killingsches Vektorfeld sein. Diese Bedingung leitete auch Trautmann ab. Wir wollen jedoch betonen, daß (3,3) aus (3,2) nur dann folgt, wenn die Größe (3,1) für jede mit der Symmetrie und der Divergenzfreiheit verträgliche Wahl des Tensors T_{ik} einem Erhaltungssatz unterliegen soll. Wir müssen uns insbesondere dabei vorstellen, daß die Metrik g_{ik} den Tensor T_{ik} nicht bereits eindeutig bestimmt und müssen andere Zusammenhänge zwischen diesen beiden Tensoren als den durch die Divergenzfreiheit bedingten ignorieren. Eine solche Situation liegt bekanntlich in der SRT vor.

Es ist leicht der Nachweis erbracht, daß die Killingschen Vektorfelder der SRT gerade die infinitesimalen Transformationen der Lorentz-Gruppe bilden. Allgemein weiß man, daß die Killingschen Vektorfelder eines Riemannschen Raumes gerade den infinitesimalen Transformationen der Gruppe seiner isometrischen Abbildungen entsprechen (siehe z. B. Yano). Gilt nun für ein Killingfeld sogar noch die Beziehung

$$\xi^i\, \xi_i = \text{const.},$$

so sind die zugehörenden isometrischen Abbildungen *Translationen*, und die zu den ξ^i gehörenden Weltlinien sind geodätisch. Es folgt hieraus, daß im Falle der SRT ein Killingfeld mit konstanter Norm notwendig ein konstantes Vektorfeld ist, d. h. $\partial^k \xi^i = 0$ gilt. Da ξ^i zeitartig ist, folgt nach II. 5., daß ξ^i zu einem Inertialsystem gehört.

Satz 2:

Damit für eine Schar von Beobachtern in der SRT die Energie für jede mit (2,3) verträgliche Wahl von T_{ik} eine erhalten bleibende Größe ist, müssen sich die Beobachter in einem Inertialsystem befinden, d. h. ihr normiertes Tangentenfeld muß konstant und daher auch killingsch sein.

4. Definition der Energie bei beliebiger Metrik

Es gibt ein allgemeines Verfahren, das es gestattet, ein speziell-relativistisch geschriebenes Naturgesetz auf den Fall beliebiger Metrik zu verallgemeinern. Hierzu schreibt man es in einer vollständig kovarianten Form (was wenigstens lokal immer möglich ist). Anschließend sieht man nach, ob die so erhaltene Formel sinnvoll bleibt, wenn man die Minkowskischen g_{ik} durch eine allgemeine Metrik ersetzt. Es kann vorkommen, daß eine solche Ersetzung nicht geht, weil das ursprüngliche Gesetz spezifische, nur mit der Minkowskischen Metrik verträgliche Aussagen beinhaltet. Dann hat man zu versuchen, die Formeln mit Hilfe von Ausdrücken in R_{iklm} so zu korrigieren, daß beim Verschwinden des Krümmungstensors die ursprüngliche Formel entsteht. In den meisten Fällen ist das eben kurz skizzierte Verfahren eindeutig, wenn man den vollen Inhalt der SRT ausschöpft — insbesondere die Möglichkeit beliebiger raumartiger HFl und beliebig bewegter Beobachter in Betracht zieht.

Die eben beschriebene Übertragung von physikalischen Gesetzen, deren genaue Form in der SRT bekannt ist, auf den Fall des Vorliegens allgemeiner Metrik, wurde vielfach benutzt. Man denke dabei nur an die „allgemein-relativistische" Formulierung der Elektrodynamik, der Klein-Gordon-Gleichung sowie der Dirac-Gleichung. Andere Beispiele bilden die Bewegungsgleichungen für Testpartikel unter dem Einfluß nicht-metrischer Kräfte und das Prinzip ihrer Bewegung auf geodätischen WL beim Fehlen solcher Kräfte usw.

Dieses erfolgreiche Leitmotiv für die Behandlung einer gekrümmten Raum-Zeit-Welt, das so viele unserer Erfahrungen über diesen Gegenstand enthält, wurde jedoch bei der Definition von Energie und Impuls verlassen. Es konnte freilich auch gar nicht benutzt werden, da man in der Entstehungsperiode der ART den Energiebegriff der SRT nur mit Hilfe ausgewählter KS (nämlich der Lorentzschen) fassen konnte und an eine koordinatenfreie Darstellung, wie wir sie in (2,1) und (2,2) vorliegen haben, noch gar nicht zu denken war. Den Grund hierfür haben wir freilich mehr in begrifflichen denn mathematischen Schwierigkeiten zu suchen. Brauchte doch Einstein, wie wir in seiner Autobiographie lesen, allein 7 Jahre, um sich von der Auffassung zu befreien, daß den allgemeinen Koordinatensystemen eine metrische Bedeutung zukommt.

Heute hindert uns jedoch nichts, die Einführung der sogenannten Pseudotensoren in den Energiebegriff als einen historischen Irrweg zu betrachten und die im Falle topologisch nicht trivialer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten mathematisch inkonsistente Integration über solche Gebilde zu vermeiden. Wir können nämlich den eingangs geschilderten Weg der Verallgemeinerung physikalischer Gesetze und Begriffe von ungekrümmter zu gekrümmter Raum-Zeit-Welt einschlagen. Dafür sind offenbar mit Aufstellung der Formeln (2,1) bis (2,3) alle Voraussetzungen getroffen, und wir können die bisherige Ausnahmestellung des Energiebegriffs in der ART durch die Forderung beseitigen:

Satz 3:

Die Feststellung von Satz 1 sind für eine topologisch und metrisch beliebige Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zutreffend.

Eine solche Definition bringt von vornherein einige große Vorteile:

a) Zu jeder Schar von Beobachtern gehört eine eindeutige Energiedichte bei der Messung der Energie in den Weltpunkten einer raumartigen HFl. Die Energie ist somit vollständig lokalisierbar in genau der Weise, wie wir es von der SRT gewohnt sind.
b) Die Energie hängt außer von der durch T_{ik} gekennzeichneten physikalischen Situation nur vom Bewegungszustand der Beobachter ab. Die Energie ist somit wie gewohnt eine Relation zwischen einer objektiven physikalischen Situation und dem Bewegungszustand von Beobachtern.
c) Der Bewegungszustand der Beobachter geht nur über ihr (normiertes) Tangentenfeld ein. Deshalb hängt die Energie in gewohnter Weise nur von der Relativgeschwindigkeit der Beobachter im Augenblick der Messung ab und nicht von ihren sonstigen Eigenschaften (Beschleunigung).
d) Die Energie ist ein Funktional des Zustandes in folgendem Sinne: Um die Energie(dichte) festzustellen, benötigen wir die Kenntnis des Bewegungszustandes der Beobachter und die des Energie-Impuls-Tensors nur „während" der Messung, d. h. auf dem gerade betrachteten HFl-Stück.

Dies sind wichtige, von unseren bisherigen Erfahrungen bestätigte Eigenschaften, die wir verlieren, wenn wir Pseudotensoren einführen. Bemerken wir in diesem Zusammenhang noch die weiteren Eigenschaften unseres Energieausdrucks:

e) Die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M sowie die HFl-Stücke Ω dürfen beliebige topologische Gestalt besitzen. Letztere dürfen insbesondere auch geschlossen sein, ohne daß sich die Energiebilanz auf die triviale Gleichung $E = 0$ reduziert.
f) Die Energie lokalisierter Systeme hängt nicht ab von der (uns völlig unbekannten!) Struktur des Kosmos in großer Entfernung von einem solchen System. Irgendwelche Koordinatenbedingungen sind überflüssig.
g) Wegen der Lokalisierbarkeit a) ist es zu Messung der Energie nicht notwendig, sich ins „unendlich Ferne" zu begeben, um das asymptotische Verhalten gewisser Ausdrücke zu studieren. Im Gegensatz zu allen Definitionen mit Pseudotensoren ist der vorgeschlagene Energiebegriff beobachtbar (wenigstens im Prinzip) und nicht nur berechenbar. Man bemerke hierzu, daß die Energie eine Observable wird, wenn eine Lokalisierbarkeit im Sinne von a) vorliegt — anderenfalls gibt es keine realisierbare Meßvorschrift. (Letztere Bemerkung betrifft den klassischen, nicht den quantentheoretischen Fall. Die Pseudotensoren quantentheoretisch zu rechtfertigen, hat noch niemand ernsthaft versucht. Es dürfte dies auch ein hoffnungsloses Unternehmen sein. Die Quantentheorie benötigt keine Pseudotensoren.)

Für physikalische Zwecke sind die Eigenschaften a) bis g) offenbar sehr nützlich. Jedoch trifft unsere Energiedefinition auf zwei Probleme, die noch gelöst sein müssen, ehe man sie als gelungen bezeichnen darf. Das erstere der beiden Probleme betrifft die Erhaltung der Energie und den ersten Hauptsatz. Das zweite jedoch die Gravitationsenergie. Wir wenden uns zunächst dem ersten Problem zu.

5. *Über den Satz von der Erhaltung der Energie*

Historisch gesehen wurde die Einführung der Pseudotensoren in die Energiedefinition durch die Forderung nach Erhaltung der Energie für beliebig bewegte Beobachter, „die zu einem Koordinatensystem" gehören, veranlaßt.

Daß die Vermengung von KS und Bewegungszuständen von Beobachtern nur in Ausnahmefällen sinnvoll erscheint, wurde schon in II. 5. ausführlich dargelegt. Die Forderung, daß beliebig bewegte Beobachter einen Energieerhaltungssatz beobachten, die für so unabdingbar gehalten wird, kommt einfach von einer zu engen Auffassung des Wesens der SRT. In der Tat war die Schlußweise etwa folgendermaßen: Die SRT ist eine Theorie, die für gleichförmig bewegte Beobachter zutreffend ist, die sich natürlich in Inertialsystemen befinden. Dann sollten die beliebigen KS der ART die Verallgemeinerungen der Lorentzschen KS der SRT sein. Da in den Inertialsystemen Energieerhaltung festgestellt wird, sollte sie deshalb auch für mit „beliebigen Koordinatensystemen verbundene" Beobachter gelten.

Wir wissen jedoch, daß man auch in der SRT in voller Strenge beliebig bewegte Beobachter einführen kann. Satz 2 sagt uns dann gerade, daß von allen diesen möglichen Beobachtern gerade die in Inertialsystemen befindlichen die Erhaltung der Energie feststellen, die anderen aber nicht. Die für die Ableitung der Energiedefinition der ART angenommene Energieerhaltung für beliebig bewegte Beobachter ist somit bereits für das Minkowskische Linienelement falsch.

Tatsächlich lautet die Forderung nach Unmöglichkeit eines perpetuum mobile auch so, daß Beobachter, die sich in einem Inertialsystem befinden, die Erhaltung der Energie beobachten und eben deshalb kein perpetuum mobile konstruieren können.

Um diesen Sachverhalt für eine gekrümmte Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zu verallgemeinern, haben wir deshalb den Begriff des Inertialsystems richtig zu formulieren. Nun ist der Begriff des Inertialsystems in der SRT (und bereits in der Newtonschen Mechanik) physikalisch in aller Strenge faßbar:

Damit sich eine Schar Beobachter in einem Inertialsystem befindet, ist notwendig und hinreichend, daß sie jeden kräftefreien Massenpunkt (Testpartikel) als in unbeschleunigter Bewegung befindlich beobachten.

Diesen Sachverhalt kann man offenbar wortwörtlich auf den Fall einer beliebigen Raum-Zeit-Welt übertragen. Wir werden diese Definition jetzt mathematisch auswerten.

Sei ξ^i das normierte Tangentenbündel der Beobachter und w die Weltlinie irgendeines sich kräftefrei bewegenden Teilchens. Der Terminus „kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes" hat in einer beliebigen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit einen wohldefinierten Sinn: Damit w die Weltlinie eines kräftefreien Probeteilchens ist, muß w eine Geodätische sein und umgekehrt.

Seien nun α^i die auf -1 normierten Tangenten von w. Dann finden die Beobachter, daß sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit v relativ zu ihnen bewegt, wobei

$$\xi^i \alpha_i = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ist. Die Beobachter befinden sich deshalb gerade dann in einem Inertialsystem, wenn längs jeder *zeitartigen* Geodätischen

$$\xi^i \alpha_i = \text{const.} \qquad (*)$$

ist. Betrachten wir einen beliebigen Weltpunkt Q, so kann man in seiner Nähe die zeitartigen geodätischen Weltlinien durch

$$x^i = x^i(Q) + \alpha^i s - \Gamma^i_{nm} \alpha^n \alpha^m s^2 + \langle s^3 \rangle, \quad \alpha^i \alpha_i = -1 \qquad (**)$$

darstellen. Dabei bezeichnet $\langle s^3 \rangle$ Glieder, die in s mindestens von dritter Ordnung sind. Bezeichnen wir die Ableitung nach dem Parameter s durch einen Punkt, so können wir die fragliche Bedingung (*) für das Vektorfeld ξ^i

$$0 = (\dot{x}^i \xi_i)^{\cdot} = \ddot{x}^i \xi_i + \dot{x}^i \xi_{i,k} \dot{x}^k$$

schreiben. Hier setzen wir nun (**) ein und betrachten die entstehende Formel an der Stelle Q, d. h. für $s = 0$.

Es folgt

$$-\Gamma^i_{nm} \alpha^n \alpha^m \xi_i + \alpha^i \xi_{i,k} \alpha^k = 0 .$$

Diese Formel ist nur eine andere Schreibweise für

$$\alpha^n \alpha^m \partial_n \xi_m \qquad (***)$$

und gilt zunächst für beliebige Vektoren α^i mit $\alpha^i \alpha_i = -1$. Die Menge aller Vektoren β^i mit

$$\beta^n \beta^m \partial_n \xi_m = 0$$

bildet nun eine lineare Mannigfaltigkeit. Da sich in ihr alle auf -1 normierten zeitartigen Vektoren befinden, ist diese Mannigfaltigkeit der lineare Raum der kontravarianten Vektoren im Weltpunkt Q. Dieser Weltpunkt war jedoch beliebig gewählt. Damit nun (***) für *jeden* Vektor α^i gilt, muß der symmetrische Teil von $\partial_n \xi_m$ verschwinden:

$$\partial_n \xi_m + \partial_m \xi_n = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial^n \xi^m + \partial^m \xi^n = 0 .$$

Satz 4:

Damit sich eine Schar von Beobachtern mit dem normierten Tangentenfeld ξ^i in einem Inertialsystem befindet, ist notwendig und hinreichend, daß ξ^i ein Killing-Vektorfeld ist:

$$\partial^i \xi^k + \partial^k \xi^i = 0 .$$

Für Beobachter in einem Inertialsystem gilt der Satz von der Erhaltung der Energie.

Denn für ein Killingfeld ist der Wert des Energieintegrals von der benutzten HFl unabhängig.

Man kann Satz 4 auch folgende Deutung geben: Damit die Energie ein allgemeines Integral der Bewegungsgleichungen ist, muß die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ein zeitartiges Killingfeld konstanter Norm besitzen. Letzteres bedeutet, daß die Raum-Zeit-Welt eine zeitartige Translation gestattet. Dabei deutet der Ausdruck „allgemein" auf die Unabhängigkeit der Energieerhaltung von der speziellen Struktur des physikalischen Systems hin.

Wir können deshalb sagen — und dies wird sich auch für die neun anderen allgemeinen Integrale der SRT bestätigen —, daß jede Symmetrie der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ein allgemeines Integral (bzw. einen allgemeinen Erhaltungssatz) bedingt. Umgekehrt ist die Existenz allgemeiner Integrale eine Widerspiegelung vorhandener Symmetrien der Raum-Zeit-Welt. Es besteht hiernach eine eindeutige Beziehung zwischen den allgemeinen (dynamischen) Integralen und den Symmetrien des Raum-Zeit-Kontinuums.

Wir knüpfen hieran noch zwei wichtige Bemerkungen:

a) Ist ein spezieller Energie-Impuls-Tensor T_{ik} gegeben, so kann dank spezieller Eigenschaften dieses Tensors die Größe

$$-\int_{\Omega} \xi^i T_{ik} \underline{a} \, dx^k$$

sehr wohl erhalten bleiben obwohl ξ^i nicht killingsch ist; denn hierzu ist nur die Bedingung

$$T_{ik} \partial^k \xi^i = 0 \qquad (4,1)$$

notwendig, die viel schwächer ist als die, daß ξ^i killingsch ist. Daß ξ^i killingsch sein soll, ist eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung für (4,1) bei einem speziell gewählten Tensor T_{ik}. Nur wenn gefordert wird, (4,1) gelte für jeden beliebigen symmetrischen Tensor, der die Divergenzbedingung erfüllt, muß ξ^i killingsch sein. Mit anderen Worten: Wenn (4,1) erfüllt ist, haben wir ein spezielles (von der besonderen Struktur des Systems abhängendes) Integral vor uns und dieses ist genau dann allgemein, wenn ξ^i ein Killingsches Vektorfeld ist.

Spezielle Integrale kann man zu jedem Tensor T_{ik} in hinreichender Menge konstruieren und dies sogar ziemlich einfach IV. 2.), wie wir sehen werden.

Wir wollen hier nur ein besonders einfaches Beispiel erwähnen. Sei

$$T_{ik} = \eta_i \eta_k \varrho\,, \quad \eta_i \eta^i = -1 \tag{4,2}$$

Es ist dann

$$T_{ik}\, \partial^k \eta^i = \eta_i \eta_k \varrho\, \partial^k \eta^i.$$

Jedoch folgt aus der zweiten unter (4,2) stehenden Formel, daß

$$\eta_i\, \partial^k \eta^i = 0$$

ist. Für Beobachter, deren normiertes Tangentenbündel $\xi^i = -\eta^i$ ist, gilt deshalb der Energieerhaltungssatz. Das Vektorfeld $\varrho\, \eta_i$ ist divergenzfrei $\partial^i(\varrho\, \eta_i) = 0$ und die beobachtete Energiedichte relativ zu einer raumartigen HFl Ω ist $-\varrho\, \eta^i \alpha_i$ (α_i = Normale von Ω).

b) Bei genügender Inhomogenität des Raum-Zeit-Kontinuums verschwinden schließlich seine sämtlichen Symmetrien. Das Energieintegral ist dann in keinem Falle ein allgemeines Integral der Bewegungsgleichungen mehr.

Wir können uns jedoch leicht überlegen, daß diese Tatsache sehr natürlich ist:

Nehmen wir nämlich das Bestehen der Einsteinschen Gleichungen für die Metrik an, so gibt es zu einem gegebenen metrischen Feld *genau ein* T_{ik}. Berücksichtigt man also den Zusammenhang zwischen Metrik und Verteilung von Energie, Impuls und Spannungen, so ist keine Möglichkeit offen, den Schluß von Formel (3,2) auf (3,3) durchzuführen. Wir können vielmehr *nur auf* (4,1) schließen;

Aus diesem Grund wird der Begriff des allgemeinen Integrals der Bewegungsgleichungen nicht mehr anwendbar; denn es gibt zu einer bestimmten Metrik zwar viele Tensoren T_{ik}, die die Divergenzrelation — *aber nur einen, der die Einsteinschen Gleichungen* befriedigt! Nur der letztere ist vom Standpunkt der ART sinnvoll. Der Begriff des „allgemeinen" Integrals, des „allgemeinen" (d. h. von der speziellen Struktur von T_{ik} unabhängigen) Erhaltungssatzes wird daher in der ART leer.

Diese Begriffe sind hiernach nur Approximationen an die wirklichen Verhältnisse. Wegen der Kleinheit der Gravitationskonstante sind sie sehr wirksame Näherungen.

6. *Umformung der Energiedichte mit Hilfe der Einsteinschen Gleichungen*

Wir wollen jetzt in mehreren Schritten die Energiedichte für den Fall berechnen, daß das normierte Tangentenfeld der Beobachter die Richtung der Normalen eines HFl-Stückes Ω hat. Ist dann η_i das Normalenfeld von Ω, so ist

$$u = \eta^i\, T_{ik}\, \eta^k \tag{6,1}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Einsteinschen Gleichungen erfüllt sind.

Zur Berechnung von (6,1) wählen wir einen auf Ω gelegenen Weltpunkt Q aus. Gleichungen, die nur an der Stelle Q richtig sind, wollen wir dadurch kennzeichnen, daß das Gleichheitszeichen durch das Zeichen $\equiv$ ersetzt wird.

A.

In der Nähe von Q sei das raumartige HFl-Stück durch die Gleichung $f = 0$ gegeben. Ist dann e eine beliebige, im Punkte Q nicht verschwindende Funktion, so ist auch $f^* = e \cdot f = 0$ eine Gleichung für Ω. Wir wählen nun ein im Punkte Q oskullierendes KS so aus, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \delta_i^0 \cdot \lambda$$

ist. Es gilt dann für die Größe

$$\alpha^* = \frac{\partial f^*}{\partial x^i}\frac{\partial f^*}{\partial x^j} g^{ij}\,, \qquad f^* = f \cdot e$$

an der Stelle Q

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial x^\nu} \equiv -2\lambda\left(e\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^0\, \partial x^\nu} + \lambda\,\frac{\partial e}{\partial x^\nu}\right),$$

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial x^0} \equiv -2\lambda\left(e\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^{0\,2}} + 2\lambda\,\frac{\partial e}{\partial x^0}\right).$$

Wir schließen hieraus, daß man f so wählen kann, daß für die Norm

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij}$$

die Beziehungen

$$\alpha \equiv 1, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \equiv 0 \tag{6,2}$$

gelten. Wir wählen nun ein KS $\{y^i\}$ derart, daß $y^0 = f$ und

$$ds^2 = g_{\nu\mu}\, dy^\nu\, dy^\mu + g_{00}\, dy^{0\,2}$$

ist. Von den $g_{\nu\mu}$ können wir überdies

$$g_{\nu\mu} \equiv \delta_{\nu\mu}\,, \qquad \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial y^\lambda} \equiv 0$$

voraussetzen, da die Gültigkeit dieser Gleichungen durch eine Transformation $y^\nu \to \bar{y}^\nu(y^1, y^2, y^3)$ stets zu erreichen ist. Wir beachten noch, daß wegen

$$\alpha = g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$$

die Formeln (6,2) Aussagen über g_{00} enthalten.

Alles zusammengefaßt haben wir ein KS gefunden, für das gilt:

a) Ω ist durch $y^0 = 0$ gegeben
b) $g_{\nu 0} = 0$
c) $g_{\nu\mu} \equiv \delta_{\nu\mu}$, $g_{00} \equiv -1$
d) $g_{\nu\mu,\lambda} \equiv 0$
e) $g_{00,i} \equiv 0$.

Wir wollen ein KS mit diesen Eigenschaften auch „zu Ω und Q normal" nennen. Für Gleichungen, die zwischen Tensorkomponenten usw. im Punkte Q bei Benutzung eines solchen KS richtig sind, wollen wir wieder das Zeichen $\equiv$ verwenden.

Wir berechnen nun leicht

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\mu,\sigma})\,,$$

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = -\frac{1}{2} g^{00} g_{\nu\mu,0}\,, \quad \Gamma^0_{\nu 0} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,\nu}\,, \tag{6,3}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu 0} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma,0}\,, \quad \Gamma^\sigma_{00} = -\frac{1}{2} g^{\sigma\mu} g_{00,\mu}\,,$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0}\,,$$

sowie

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \equiv \Gamma^{0}_{00} \equiv \Gamma^{0}_{\nu 0} \equiv \Gamma^{\nu}_{00} \equiv 0$$

$$\Gamma^{0}_{\nu\mu} \equiv \Gamma^{\mu}_{\nu 0} \equiv \frac{1}{2}\, g_{\nu\mu,0} \tag{6,4}$$

B.

Wir betrachten nun den verjüngten Krümmungstensor der HFl Ω im Punkte Q und bezüglich des KS $\{y\}$:

$$R_{\nu\mu}(\Omega) \equiv \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial y^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}.$$

Hiernach gilt für den verjüngten Krümmungstensor des Raum-Zeit-Kontinuums M infolge der Formeln (6,4)

$$R_{\nu\mu} \equiv R_{\nu\mu}(\Omega) + \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} \Gamma^{0}_{\mu 0} - \frac{\partial}{\partial x^{0}} \Gamma^{0}_{\nu\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu 0} \Gamma^{0}_{\lambda\mu} + \Gamma^{0}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu 0} - \Gamma^{0}_{\mu 0} \Gamma^{\nu}_{0\nu},$$

$$R_{00} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{0}} \Gamma^{\nu}_{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{0}} \Gamma^{0}_{00} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{00} - \frac{\partial}{\partial x^{0}} \Gamma^{\lambda}_{00} + \Gamma^{\mu}_{0\nu} \Gamma^{\nu}_{0\mu}.$$

Weiter haben wir

$$R = R_{ik}\, g^{ik} \equiv g^{\nu\mu} R_{\nu\mu} + g^{00} R_{00} \equiv R_{\nu\nu} - R_{00}.$$

Unter Berücksichtigung der obigen Formeln bilden wir nun

$$R + 2\,R_{00} \equiv R_{\nu\nu} + R_{00} \equiv R(\Omega) + \Gamma^{0}_{\nu 0,\nu} - \Gamma^{0}_{\nu\nu,0} + \Gamma^{\nu}_{0\nu,0} - \Gamma^{\nu}_{00,\nu} + 2\,\Gamma^{\lambda}_{\nu 0} \Gamma^{0}_{\nu\lambda} - \Gamma^{0}_{\nu\nu} \Gamma^{\lambda}_{0\lambda} + \Gamma^{\mu}_{0\nu} \Gamma^{\nu}_{0\mu}$$

Unter ständiger Benutzung von (6,3) und (6,4) rechnen wir jetzt die einzelnen hier auftretenden Terme aus und erhalten:

$$\Gamma^{0}_{\nu 0,\nu} \equiv -\frac{1}{2}\, g_{00,\nu\nu}$$

$$\Gamma^{0}_{\nu\nu,0} \equiv \frac{1}{2}\, g_{\nu\nu,00}$$

$$\Gamma^{\nu}_{0\nu,0} \equiv -\frac{1}{2}\, g_{\nu\sigma,0}\, g_{\nu\sigma,0} + \frac{1}{2}\, g_{\nu\nu,00}$$

$$\Gamma^{\nu}_{00,\nu} \equiv -\frac{1}{2}\, g_{00,\nu\nu}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu 0} \Gamma^{0}_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{4}\, g_{\nu\mu,0}\, g_{\nu\mu,0}$$

$$\Gamma^{0}_{\nu\nu} \Gamma^{\nu}_{0\nu} \equiv -\frac{1}{4}\, g_{\nu\nu,0}\, g_{\lambda\lambda,0}$$

$$\Gamma^{\mu}_{0\nu} \Gamma^{\nu}_{0\mu} \equiv \frac{1}{4}\, g_{\nu\mu,0}\, g_{\nu\mu,0}$$

Damit bekommen wir die bemerkenswerte Formel

$$R + 2\,R_{00} \equiv R(\Omega) + \frac{1}{4}\,(g_{\nu\mu,0}\, g_{\nu\mu,0} - g_{\nu\nu,0}\, g_{\mu\mu,0}).$$

Wie durch ein Wunder sind alle nicht zu $R(\Omega)$ gehörenden zweiten Ableitungen des metrischen Tensors weggefallen. Der (physikalische) Grund scheint in den Beziehungen dieses Ausdrucks zu einer Energiedichte zu liegen:

Die Energiedichte sollte nach Dirac tatsächlich nur von auf Ω bildbaren Größen und der ersten „zeitlichen" Ableitungen der $g_{\nu\mu}$ abhängen — d. h. sie sollte bezüglich der Metrik ein Zustandsfunktional sein. Eine genauere Formulierung dieses Sachverhalts erfolgt im nächsten Abschnitt.

Wir bemerken nun, daß

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, R\right) \eta^{i} \eta^{k} \equiv R_{00} + \frac{1}{2}\, R$$

ist. Deshalb ist

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, R\right) \eta^{i} \eta^{k} \equiv \frac{1}{2}\, R(\Omega) + \frac{1}{8}\,(g_{\nu\mu,0}\, g_{\nu\mu,0} - g_{\nu\nu,0}\, g_{\mu\mu,0}). \tag{6,5}$$

Auf Grund der Einsteinschen Gleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik}\, R = -\varkappa\, T_{ik} \tag{6,6}$$

haben wir deshalb

$$u = \eta^{i}\, T_{ik}\, \eta^{k} \equiv -\frac{1}{2\varkappa}\, R(\Omega) - \frac{1}{8\varkappa}\,(g_{\nu\mu,0}\, g_{\nu\mu,0} - g_{\nu\nu,0}\, g_{\mu\mu,0}) \tag{6,7}$$

Eine analoge Formel findet sich auch in einer Arbeit von D. Brill (ohne Beweis), jedoch mit falschem Faktor vor dem quadratischen Term[7]).

Formel (6,7) ist nicht besonders handlich, da sie nur im Punkte Q und bei Benutzung eines zu Ω und Q normalen KS. gültig ist. Um das Zeichen $\equiv$ durch das Gleichheitszeichen ersetzen zu können, müssen wir noch den quadratischen Term in dieser Formel kovariant schreiben. Daß dies möglich ist, folgt bereits aus der Tatsache, daß alle anderen Glieder dieser Formel koordinatenunabhängige Bedeutung haben.

C.

Wir behandeln zuerst folgende Aufgabe: Ist ω_{ik} igendein Tensor, so suchen wir einen Tensor $\overline{\omega}_{ik}$ derart, daß in einem zu Ω und Q normalen KS

$$\overline{\omega}_{\nu\mu} \equiv \omega_{\nu\mu}, \quad \overline{\omega}_{\nu 0} \equiv \overline{\omega}_{0\nu} \equiv \overline{\omega}_{00} \equiv 0$$

gilt. Wir sagen zu diesem Prozeß, er „beschränke den Tensor ω_{ik} auf Ω" oder auch „$\overline{\omega}_{ik}$ sei die Beschränkung von ω_{ik} auf Ω".

Um dies durchzuführen, benötigen wir offenbar einen Tensor $r_i{}^k = r_i{}^k(\Omega)$ derart, daß

$$r_{\nu}{}^{\mu} \equiv \delta_{\nu}{}^{\mu}, \quad r_{\nu}{}^{0} \equiv r_{0}{}^{\nu} \equiv r_{0}{}^{0} \equiv 0$$

gilt. Dieser Tensor ist leicht anzugeben. Ist nämlich η_i ein zu Ω normales auf -1 normiertes Vektorfeld, so gilt

$$\eta_i \equiv \delta_i{}^0, \quad \eta^i \equiv -\delta_0{}^i$$

und deshalb ist

$$r_i{}^k = \delta_i{}^k + \eta_i\, \eta^k. \tag{6,8}$$

Es ist dann

$$\overline{\omega}_{ik} = r_i{}^n\, r_k{}^m\, \omega_{nm}. \tag{6,8a}$$

Wir suchen nun einen Tensor Ω_{ik}, der nur von Ω (und der Metrik) abhängt und für den

$$\Omega_{\nu\mu} \equiv g_{\nu\mu,0}, \quad \Omega_{0\nu} \equiv \Omega_{\nu 0} \equiv \Omega_{00} \equiv 0 \tag{6,9}$$

gilt. Sei α_i ein Vektorfeld, das auf Ω die Richtung der Normalen von Ω hat, aber nicht notwendig normiert ist. Für ein solches Feld gilt

$$\alpha_i \equiv \delta_i^0 \sqrt{-\alpha^k \alpha_k}\,, \quad \alpha_{\nu,\mu} \equiv 0\,.$$

Nun ist

$$\partial_\nu \alpha_\mu = \alpha_{\nu,\mu} - \Gamma^m_{\nu\mu} \alpha_m \equiv -\Gamma^0_{\nu\mu} \alpha_0 \equiv -\frac{1}{2} g_{\nu\mu,0} \cdot \sqrt{-\alpha^k \alpha_k}$$

Wir erhalten also Ω_{ik} durch die Beschränkung des Tensors

$$-\frac{\partial_i \alpha_k + \partial_k \alpha_i}{\sqrt{-\alpha_j \alpha^j}}$$

auf Ω.

Satz 5:

Sei Ω ein HFl-Stück, η_i das Normalenfeld von Ω und α_i irgendein Vektorfeld, das auf Ω die Richtung der Normalen hat:

$$(\alpha_i - \lambda \eta_i)(Q) = 0 \text{ für } Q \in \Omega$$

mit einer gewissen Funktion $\lambda \neq 0$. Sei weiter

$$r_i{}^k = \delta_i{}^k + \eta_i \eta^k.$$

Ist dann

$$\Omega_{ik} = -r_i{}^n r_k{}^m \left(\frac{\partial_n \alpha_m + \partial_m \alpha_n}{\sqrt{-\alpha_j \alpha^j}}\right),$$

so gilt in jedem zu Ω und Q normalen KS

$$\Omega_{\nu\mu} \equiv g_{\nu\mu,0}\,, \quad \Omega_{\lambda 0} \equiv \Omega_{0\lambda} \equiv \Omega_{00} \equiv 0\,.$$

Ω_{ik} verschwindet auf Ω identisch, wenn es ein Killing-Vektorfeld gibt, das auf Ω in Richtung der Normalen von Ω weist.

Weiter gilt

Satz 6:

Ist Ω ein HFl-Stück und haben die normierten Tangenten ξ^i einer Schar von Beobachtern die Richtung der Normalen η_i von Ω

$$\xi^i + \eta^i = 0\,,$$

so gilt für die Energiedichte

$$u = -\xi^i T_{ik} \eta^k$$

beim Bestehen der Einsteinschen Gleichungen die Formel

$$u = -\frac{1}{2\varkappa} R(\Omega) + \frac{1}{8\varkappa} (\Omega_i{}^i \Omega_j{}^j - \Omega_j{}^i \Omega_i{}^j)\,.$$

Im Sinne des kanonischen Formalismus wird der Zustand eines physikalischen Systems bezüglich der Metrik (d. h. ohne Berücksichtigung der anderen eventuell noch vorhandenen Felder) durch die $g_{\nu\mu}$ und die zugehörenden ,,konjugierten Impulse" gegeben. Letztere sind Funktionen der $g_{\nu\mu,0}$. Eine physikalische Größe ist hiernach genau dann ein ,,Zustandsfunktional" $\Phi(\Omega)$ bezüglich der Metrik im Sinne von Dirac, wenn sie nur von den Werten $g_{\nu\mu}$ und $g_{\nu\mu,0}$ auf Ω abhängt.

Letzteres besagt, daß in Φ z. B. nur solche Ableitungen vorkommen dürfen, die man auf Ω ausführen kann, *ohne* dabei *Ω zu verlassen*. Φ kann also z. B. von $g_{\nu\mu,\lambda}$; $g_{\nu\mu,\lambda,\sigma\ldots}$ $g_{\nu\mu,0\sigma\ldots}$ abhängig sein, aber z. B. nicht von $g_{\nu\mu,00}$.

Wir können diesen Sachverhalt vollständig kovariant formulieren:

Satz 7:

Damit eine Größe ein Zustandsfunktional (bezüglich der vorliegenden Metrik) auf einem Hyperflächenstück Ω ist, ist notwendig und hinreichend, daß sie aus der Beschränkung der Metrik auf Ω

$$r_i{}^n r_k{}^m g_{nm}\,, \quad r_i{}^k = r_i{}^k(\Omega)$$

und dem Tensor Ω_{ik} durch Operationen errechenbar ist, deren Ausführung ohne Verlassen von Ω möglich ist.

Wir schließen hieraus, da $R(\Omega)$ offenbar ein Zustandsfunktional auf Ω ist, den bemerkenswerten Sachverhalt:

Satz 8:

Befindet sich eine Schar von Beobachtern bezüglich eines HFl-Stückes Ω in Ruhe, so ist die von ihnen beobachtete Energiedichte (sowie die Energie selbst) ein Zustandsfunktional auf Ω bezüglich der Metrik.

Die Energiedichte ist überdies quadratisch in den ,,konjugierten Impulsen".

Dies ist offenbar eine Folge von Satz **6**.

7. *Die Gravitationsenergie*

A.

Wir wollen nun den Nachweis erbringen, daß unser Ansatz für die Energie tatsächlich auch die Gravitationsenergie mit enthält.

Was wir experimentell von der Gravitationsenergie wissen und nachweisen können, läßt sich bereits mit der Newtonschen Gravitationsenergie herleiten:

Ist ϱ eine Massendichte, und ist das Potential φ durch

$$\Delta \varphi = 4\pi\gamma\varrho\,, \quad \lim_{r\to\infty} \varphi = 0 \tag{7,1}$$

bestimmt, so ist

$$E_{\text{grad.}} = -\frac{1}{8\pi\gamma} \int (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d^3x = \frac{1}{8\pi\gamma} \int \varphi \cdot \varrho d^3x\,.$$

Unter Berücksichtigung der SRT erhalten wir also für eine bezüglich eines Intertialsystems ruhende Masse die Gesamtenergie

$$E = c^2 \int \varrho d^3x - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d^3x\,. \tag{7,2}$$

Zwischen der Newtonschen Gravitationskonstante γ und der in den Einsteinschen Gleichungen auftretenden Konstante $\varkappa$ besteht der Zusammenhang

$$\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\,. \tag{7,3}$$

Setzen wir

$$\psi = \frac{2\varphi}{c^2}\,, \tag{7,4a}$$

so haben wir wegen (7,1)

$$c^2 \varrho = \frac{1}{\varkappa} \Delta \psi\,, \quad \frac{1}{8\pi\gamma} (\operatorname{grad} \varphi)^2 = \frac{1}{4\varkappa} \operatorname{grad} \psi^2 \tag{7,4b}$$

und können an Stelle von (7,2) den gleichwertigen Ausdruck

$$E = \frac{1}{\varkappa}\left[\int \Delta\psi d^3x - \frac{1}{4}\int (\operatorname{grad}\psi)^2 d^3x\right] \tag{7,5}$$

schreiben.

Man kann sich (7,5) als Anfang einer „Potenzreihenentwicklung" vorstellen, bei der der experimentelle Nachweis der höheren Glieder allerdings hinter unseren derzeitigen Möglichkeiten liegt: Das erste Glied ist homogen vom ersten Grad und das zweite homogen vom zweiten Grad in bezug auf die Substitution $\psi \to \lambda\psi$, wobei λ eine Zahl ist.

B.

Beim Übergang zur Einsteinschen Gravitationsenergie hat man an Stelle von (7,1) die Einsteinschen Gleichungen zu berücksichtigen. Es folgt nach bekannten Rechnungen daß bei Anwesenheit einer Massendichte ϱ an Stelle des Minkowskischen Linienelements das Linienelement

$$ds^2 = (1-\psi)\,\delta_{\nu\mu}\,dx^\nu dx^\mu - (1+\psi)\,dx^{0\,2} \tag{7,6}$$

zu treten hat. Da bei der Berechnung von (7,6) konsequent in ψ quadratische Glieder vernachlässigt werden, können wir auch schreiben

$$ds^2 = e\,\delta_{\nu\mu}\,dx^\nu dx^\mu - e^{-1}\,dx^{02} \text{ mit } e = 1-\psi\,. \tag{7,7}$$

Wir wollen die Ersetzung des Minkowskischen Linienelements durch (7,7) kovariant formulieren:

Sei Ω eine HFl und $\varrho \geq 0$ eine Massendichte, die für relativ zu Ω ruhende Beobachter ruhend erscheint. Das bedeutet, wenn η_i das Normalenfeld von Ω ist,

$$\eta^i\,\partial_i\,\varrho = 0\,. \tag{7,8}$$

Ist Δ der Laplace-Beltrami-Operator der zur Beschränkung der Metrik auf Ω gehört, verschwindet ϱ genügend rasch in der Nähe des Randes von Ω, so ist

$$\Delta\psi = \varkappa c^2\varrho\,,\quad \lim_{Q\to \text{Rand}\,\Omega}\psi(Q) = 0 \tag{7,9}$$

eindeutig lösbar (Δ ist ein elliptischer Differentialoperator). Wir ersetzen dann die Metrik

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k \quad\text{durch}\quad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ik}\,dx^i\,dx^k \tag{7,10}$$

mit Hilfe folgender Vorschrift: Ist Ω durch $y^0 = 0$ gegeben und sind die y^ν so gewählt, daß im KS $\{y^i\}$ $g_{\nu 0} = 0$ ist, so sei

$$\bar{g}_{\nu\mu} = e\,g_{\nu\mu},\ \bar{g}_{\nu 0} = 0,\ \bar{g}_{00} = e^{-1}g_{00},\ e = 1-\psi\,. \tag{7,11}$$

Setzt man in diese Vorschrift ds^2 als das Minkowskische Linienelement ein, so führen die Formeln (7,8) bis (7,11) genau (7,7). Da in den angegebenen Regeln aber keinerlei Hinweise enthalten sind, daß das Linienelement ds^2 minkowskisch ist, können wir sie nach bewährtem Rezept für beliebige Metrik als richtig anzusehen versuchen.

Wir betrachten deshalb im folgenden gleich eine *beliebige* Metrik ds^2 und konstruieren nach der gegebenen Vorschrift $d\bar{s}^2$. Überstrichene Größen deuten darauf hin, daß die Bildung mit der Metrik $d\bar{s}^2$ zu vollziehen ist.

C.

Betrachten wir nun eine Schar von Beobachtern mit normierten Tangenten ξ^i, die sich relativ zu Ω in Ruhe befinden: $\xi^i + \eta^i = 0$ auf Ω.

Vom Standpunkt der Metrik ds^2 haben wir dann die Energie

$$E = -\int_\Omega \xi^i\,T_{ik}\,\underset{-}{\mathfrak{a}}\,dx^k, \tag{7,12}$$

die wir nach Einführen der Massendichte ϱ durch den korrigierten Ausdruck

$$\bar{E} = -\int_\Omega \xi^i\,\bar{T}_{ik}\,\underset{-}{\bar{\mathfrak{a}}}\,dx^k \tag{7,13}$$

zu ersetzen haben.

Natürlich hängt $\bar{E}$ von ψ ab. Wir ersetzen ψ durch $\lambda\psi$ und erhalten

$$\bar{E}\,[\lambda\psi] = \bar{E}_0 + \lambda\bar{E}_1 + \lambda^2\,\bar{E}_2 + \langle\psi^3\rangle, \tag{7,14a}$$

wobei $\langle\psi^3\rangle$ Glieder bezeichnet, die aus Formen höher als zweiten Grades bezüglich ψ bestehen. Nach (7,5) haben wir

$$\begin{aligned}\bar{E}_0 = E,\quad \bar{E}_1 &= \frac{1}{\varkappa}\int_\Omega \Delta\psi\,dV,\\ \bar{E}_2 &= -\frac{1}{4\varkappa}\int_\Omega \partial^i\psi\,\partial_i\psi\,dV\end{aligned} \tag{7,14b}$$

wenigstens dann zu erwarten, wenn sich die Beobachter in einem Inertialsystem befinden. (Im allgemeinen Fall werden sich noch zusätzliche Glieder ergeben.)

Wenn wir finden, daß aus (7,13) die Formeln (7,14) folgen, so können wir mit vollem Recht sagen, daß unser Energieausdruck alles über die Gravitationsenergie heute überhaupt Nachweisbare enthält.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Lösung dieses Problems.

D.

Da auf Ω

$$\bar{g}_{\nu\mu} = e g_{\nu\mu} \tag{*}$$

gilt, können wir eine allgemeine Formel heranziehen, um zunächst $\bar{R}(\Omega)$ zu berechnen: Ist n die Dimension eines beliebigen Riemannschen Raumes, so folgt aus (*)

$$e\bar{R} = R + (n-1)\,e^{-1}\Delta e + e^{-2}\,\frac{(n-1)\,(n-6)}{4}\,\partial^i e\cdot\partial_i e\,.$$

In unserem Fall ist $n = 3$ und deshalb

$$e\bar{R}(\Omega) = R(\Omega) + 2\,e^{-1}\Delta e - \frac{2}{3}\,e^{-2}\,\partial^i e\cdot\partial_i e\,.$$

Nun ist $e = 1-\psi$, und somit

$$e\bar{R}(\Omega) = R(\Omega) - \frac{2\,\Delta\psi}{1-\psi} - \frac{2}{3}\,\frac{\partial^i\psi\,\partial_i\psi}{(1-\psi)^2}$$

Bis auf Glieder mindestens dritten Grades in ψ ist also

$$\begin{aligned}e\bar{R}(\Omega) = R(\Omega) &- 2\,\Delta\psi - 2\,\psi\Delta\psi\\ &- \frac{2}{3}\,\partial^i\psi\,\partial_i\psi + \langle\psi^3\rangle\end{aligned} \tag{7,15}$$

Für die folgende Rechnung benutzen wir weiter ein KS mit

$g_{\nu 0} = \bar{g}_{\nu 0} = 0$ und $y^0 = 0$ als Gleichung für Ω.

Es ist

$$\begin{aligned} \eta_i &= \delta_i^0 \sqrt{-g_{00}}, & \eta^i &= -\delta_0^i \sqrt{-g^{00}}, \\ \bar{\eta}_i &= e^{-\frac{1}{2}} \eta_i, & \bar{\eta}^i &= e^{\frac{1}{2}} \eta^i. \end{aligned} \qquad (7,16)$$

Wir sehen zunächst, daß

$$r_i^k = \delta_i^k + \eta_i \eta^k = \delta_i^k + \bar{\eta}_i \bar{\eta}^k = \bar{r}_i^k$$

ist und nur die r_ν^μ von Null verschieden sind. Weiter ist

$$\partial_\nu \eta_\mu = -\Gamma^0_{\nu\mu} \eta_0, \quad \bar{\partial}_\nu \bar{\eta}_\mu = -\bar{\Gamma}^0_{\nu\mu} \bar{\eta}_0.$$

Aus

$$\Gamma^0_{\nu\mu} = -\frac{1}{2} g^{00} g_{\nu\mu,0}, \quad \bar{\Gamma}^0_{\nu\mu} = -\frac{1}{2} \bar{g}^{00} \bar{g}_{\nu\mu,0} = e^2 \Gamma^0_{\nu\mu}$$

folgt daher

$$\partial_\nu \eta_\mu = -e^2 \Gamma^0_{\nu\mu} \bar{\eta}_0 = -e^2 \Gamma^0_{\nu\mu} \eta_0 e^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{2}} \partial_\nu \eta_\mu.$$

Satz 5 sagt uns dann

$$\bar{\Omega}_{ik} = e^{\frac{3}{2}} \Omega_{ik}.$$

Ferner sehen wir wegen

$$\bar{\Omega}_i^k = \bar{\Omega}_{il} \bar{g}^{lk} = e^{\frac{3}{2}} \Omega_{il} g^{lk} e^{-1} = e^{\frac{1}{2}} \Omega_i^k \qquad (7,17)$$

Durch Kombination von (7,15) und 7,17) erhalten wir

$$\begin{aligned} e&\left[-\frac{1}{2\varkappa} \bar{R}(\Omega) + \frac{1}{8\varkappa}(\bar{\Omega}_i^i \bar{\Omega}_j^j - \bar{\Omega}_i^j \bar{\Omega}_j^i)\right] \\ &= -\frac{1}{2\varkappa} R(\Omega) + \frac{1}{8\varkappa}(\Omega_i^i \Omega_j^j - \Omega_i^j \Omega_j^i) \\ &+ \frac{e^2-1}{8\varkappa}(\Omega_i^i \Omega_j^j - \Omega_i^j \Omega_j^i) + \frac{1}{\varkappa} \Delta\psi \\ &+ \frac{1}{\varkappa} \psi \Delta \psi + \frac{3}{4\varkappa} \partial^i \psi \partial_i \psi + \langle \psi^3 \rangle \end{aligned}$$

Nach Satz 6 läßt sich diese Formel wie folgt schreiben

$$e \bar{\eta}^i \bar{\eta}^k \bar{T}_{ik} = \eta^i \eta^k T_{ik} + \frac{\psi^2 - 2\psi}{8\varkappa}(\Omega_i^i \Omega_j^j - \Omega_i^j \Omega_j^i)$$
$$+ \frac{1}{\varkappa} \Delta \psi + \frac{1}{\varkappa} \psi \Delta \psi + \frac{3}{4\varkappa} \partial^i \psi \partial_i \psi + \langle \psi^3 \rangle \qquad (7,18)$$

Nach Voraussetzung ist $\xi^i + \eta^i = 0$, und somit

$$\eta^i \eta^k T_{ik} \, dV = -\xi^i T_{ik} \underline{a} \, dx^k \text{ auf } \Omega.$$

Weiter ist wegen $d\bar{V} = e^{\frac{3}{2}} dV$ und (7,16)

$$e \bar{\eta}^i \bar{\eta}^k \bar{T}_{ik} \, dV = e^{-\frac{1}{2}} \bar{\eta}^i \bar{\eta}^k \bar{T}_{ik} \, d\bar{V} = \eta^i \bar{T}_{ik} \bar{\eta}^k \, d\bar{V}$$

und somit

$$e \bar{\eta}^i \bar{\eta}^k \bar{T}_{ik} \, dV = -\xi^i \bar{T}_{ik} \underline{\bar{a}} \, dx^k \text{ auf } \Omega.$$

Nach Multiplikation mit dV folgt daher aus (7,18) die bemerkenswerte Formel

$$\begin{aligned} -\xi^i \bar{T}_{ik} \underline{\bar{a}} \, dx^k &= -\xi^i T_{ik} \underline{a} \, dx^k \\ &+ \left(\frac{\psi^2 - 2\psi}{8\varkappa}\right)(\Omega_i^i \Omega_j^j - \Omega_i^j \Omega_j^i) \, dV \\ &+ \frac{1}{\varkappa} \Delta \psi dV + \left(\frac{1}{\varkappa} \psi \Delta \psi + \frac{3}{4} \partial^i \psi \, \partial_i \psi\right) dV \\ &+ \langle \psi^3 \rangle \text{ auf } \Omega. \end{aligned} \qquad (7,19)$$

Nun gilt, falls Ω eine Hyperfläche ist, die Greensche Formel

$$\int_\Omega \psi \Delta \psi \, dV + \int_\Omega \partial^i \psi \, \partial_i \psi \, dV = 0.$$

Wir lernen von ihr, daß

$$\frac{1}{\varkappa} \int_\Omega \left(\psi \Delta \psi + \frac{3}{4} \partial^i \psi \, \partial_i \psi\right) dV = -\frac{1}{4\varkappa} \int_\Omega \partial^i \psi \, \partial_i \psi \, dV$$

ist.

Wir haben also (7,14) *tatsächlich bestätigen können.* In einem Inertialsystem verschwindet nämlich der Tensor Ω_{ik}. Ist jedoch die Metrik bezüglich der HFl Ω wesentlich nicht-stationär, so ist $\Omega_{ik} \neq 0$. Wegen $\Omega_{\nu\mu} = g_{\nu\mu,0}$ in einem zu Ω und Q normalen KS kann man Ω_{ik} in diesem Zusammenhang als „Tensor der Änderungsgeschwindigkeit" der Metrik betrachten. Es ist dann der von Ω_{ik} abhängende Bestandteil der Energiedichte quadratisch in der Geschwindigkeit, mit der sich die Metrik ändert. Diese Größe ist somit dual zur kinetischen Energie: Bei ersterer ist die Massendichte unbewegt, aber die Metrik ändert sich, bei der letzteren ist die Metrik unverändert aber die Massendichte bewegt.

Schließlich stellen wir fest, daß durch unsere Rechnungen der Prozeß der Ersetzung von ds^2 durch $d\bar{s}^2$ auch im allgemeinen Falle gerechtfertigt erscheint.

Satz 9:

Es sei ds^2 eine beliebige Metrik und Ω eine HFl mit Normalenfeld η_i. Ist zusätzlich eine in ds^2 noch nicht berücksichtigte Massendichte ϱ vorhanden, die bezüglich Ω ruht

$$\eta_i \partial^i \varrho = 0,$$

so hat die Einbeziehung von ϱ eine Änderung von ds^2 zur Folge, die näherungsweise wie folgt berücksichtigt wird. Ist Δ der Laplace-Beltrami-Operator der auf Ω beschränkten Metrik ds^2, so suchen wir eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \psi = \varkappa c^2 \varrho$$

mit der Nebenbedingung

$$\lim \psi(Q) \to 0 \text{ für } Q \to \text{Rand } \Omega.$$

Die neue Metrik $d\bar{s}^2$ ist dann auf Ω wie folgt definiert, wobei

$$e = 1 - \psi$$

gesetzt wird:

1. Für die Normalen $\bar{\eta}_i$, $\bar{\eta}^i$ von Ω bezüglich $d\bar{s}^2$ gelte
$$\bar{\eta}_i = e^{-\frac{1}{2}} \eta_i, \quad \bar{\eta}^i = e^{\frac{1}{2}} \eta^i.$$
2. Mit dem „Beschränkungstensor"
$$r_i^k = \bar{r}_i^k = \delta_i^k + \eta_i \eta^k$$
gilt
$$e \, r_i^n r_k^m g_{mn} = \bar{r}_i^n \bar{r}_k^m \bar{g}_{nm}.$$

Satz 9 gibt eine völlig kovariante Formulierung des unter B. beschriebenen „Korrekturprozesses" für die Metrik ds^2, bei dem von KS keine Rede mehr ist.

Satz 10:

Unter Voraussetzung des Sachverhaltes und der Bezeichnungen von Satz 9 entwickeln wir die „korrigierte" Energie

$$\bar{E} = -\int_\Omega \xi^i \bar{T}_{ik} \underline{\bar{a}} \, dx^k, \quad \xi^i + \eta^i = 0$$

in eine Reihe

$$\overline{E} = \overline{E}_0 + \overline{E}_1 + \overline{E}_2 \ldots,$$

wobei $\overline{E}_i$ alle in ψ vom Grade i homogenen Formen zusammenfaßt. Als Funktional von ψ gelte also

$$\overline{E}_i [\lambda\psi] = \lambda^i \, \overline{E} [\psi] .$$

Dann ist

$$\overline{E}_0 = -\int\limits_\Omega \xi^i \, T_{ik} \, \underline{a} \, d x^k,$$

$$\overline{E}_1 = \frac{1}{\varkappa} \int\limits_\Omega \Delta \psi d V - \frac{1}{4\varkappa} \int\limits_\Omega \psi \, (\Omega_i{}^i \, \Omega_j{}^j - \Omega_i{}^j \, \Omega_j{}^i) \, dV,$$

$$\overline{E}_2 = -\frac{1}{4\varkappa} \int\limits_\Omega \partial^i \psi \, \partial_i \psi \, dV + \frac{1}{8\varkappa} \int\limits_\Omega \psi^2 \, (\Omega_i{}^i \, \Omega_j{}^j - \Omega_i{}^j \, \Omega_j{}^i) \, dV.$$

E.

Auf Grund seiner Bedeutung wollen wir für den Fall der Newtonschen Approximation Satz 10 verschärfen.

Sei

$$d s^2 = \delta_{\nu\mu} \, d x^\nu \, d x^\mu - d x^{0^2}, \quad \xi^i = \delta_0{}^i \tag{7,20}$$

und

$$d\overline{s}^2 = A \, \delta_{\nu\mu} \, d x^\nu \, d x^\mu - B \, d x^{0^2}, \quad \overline{\eta}^i = \alpha \, \xi^i, \; \overline{\eta}^i \, \overline{\eta}_i = -1 \tag{7,21}$$

Die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der Newtonschen Approximation liefern A und B nur bis zur ersten Ordnung von ψ eindeutig. Sei also

$$\begin{aligned} A &= 1 - \psi + \lambda\psi^2 + \ldots \\ B &= 1 + \psi + \mu'\psi^2 + \ldots = \frac{1}{1-\psi} + \mu\psi^2 + \ldots \end{aligned} \tag{7,22}$$

Wir haben dann

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \langle\psi^3\rangle$$

und es fragt sich, ob $\overline{E}_1$ und $\overline{E}_2$ von den Koeffizienten λ und μ (bzw. μ') abhängig sind.

Wir betrachten eine beliebige raumartige HFl Ω und setzen

$$-\int\limits_\Omega \xi^i \, \overline{T}_{ik} \, \overline{a} \, d x^k = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \langle\psi^3\rangle, \tag{7,23}$$

wobei der Index die Ordnung in ψ angibt. ($\overline{E}_0$ verschwindet wegen $T_{ik} = 0$ für die Minkowski-Metrik).

Ist Ω_0 durch $x^0 = \text{const.}$ gegeben, so ist, da ξ^i killingsch ist, auch

$$\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \langle\psi^3\rangle = -\int\limits_{\Omega_0} \xi^i \, \overline{T}_{ik} \, \overline{a} \, d x^k$$

und somit

$$\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \langle\psi^3\rangle = \int\limits_{\Omega_0} \alpha^{-1} \, \overline{\eta}^i \, \overline{T}_{ik} \, \overline{\eta}^k \, d\overline{V}.$$

Nun ist $\overline{\eta}^i \, \overline{T}_{ik} \, \overline{\eta}^k$ von mindestens) 1. Ordnung in ψ, und deshalb fällt eine Änderung von α und $d\overline{V}$ in Gliedern höher als erster Ordnung in ψ in den Bereich $\langle\psi^3\rangle$. Also ist $\overline{E}_1 + \overline{E}_2$ von μ bzw. μ' unabhängig. Wir können also $B = A^{-1}$ setzen, ohne den Wert von $\overline{E}_1 + \overline{E}_2$ dabei zu ändern.

Sei nun

$$e = 1 - \psi' = 1 - \psi + \lambda\psi^2$$

Wir finden nach Satz 10

$$\overline{E}_1 = \frac{1}{\varkappa} \int \Delta \psi' \, d V$$

$$\overline{E}_2 = -\frac{1}{4\varkappa} \int \partial^i \psi' \, \partial_i \psi' \, d V.$$

Wir sehen, daß der Übergang $\psi' \to \psi$ den Ausdruck $\overline{E}_2$ nur um Größen der Ordnung $\langle\psi^3\rangle$ abändern kann, während

$$\overline{E}_1 = \frac{1}{\varkappa} \int \Delta \psi d V - \frac{1}{\varkappa} \lambda \int \Delta \psi^2 \, d V + \langle\psi^3\rangle$$

wird. Nun ist aber

$$\Delta \psi^2 = 2 \, \partial^\nu (\psi \, \partial_\nu \psi)$$

und wegen

$$\psi \sim \frac{b}{r} \qquad \text{für } r \to \infty$$

ist

$$\psi \, \partial_\nu \, \psi \sim \frac{b'}{r^2} \qquad \text{für } r \to \infty .$$

Also ist

$$\int \Delta \, \psi^2 \, d V = 0$$

und $\overline{E}_1$ hängt nicht von λ ab.

Satz 10a:

Ist g_{ik} die Minkowskische Metrik und

$$\overline{g}_{\nu\mu} = A \, \delta_{\nu\mu}, \quad \overline{g}_{00} = -B, \quad \overline{g}_{\nu 0} = 0 ,$$

so ist mit den Bezeichnungen von Satz 10

$$\overline{E} = \frac{1}{\varkappa} \int \Delta \psi \, d V - \frac{1}{4\varkappa} \int \cdot \, \partial^i \psi \, \partial_i \psi \cdot d V + \langle\psi^3\rangle$$

immer dann, wenn

$$A = 1 - \psi + \langle\psi^2\rangle, \; B = 1 + \psi + \langle\psi^2\rangle$$

ist. Dabei bezeichnet $\langle\psi^2\rangle$ Terme von mindestens 2. Ordnung in ψ.

Satz 10a zeigt, daß die Übereinstimmung mit dem Newtonschen Ausdruck für die Gravitationsenergie nicht durch eine „geschickte" Wahl der $\overline{g}_{ik}$ erzielt wurde. Nach Satz 10a wird der Ausdruck für die Energie bis zur *zweiten* Näherung im Gravitationspotential bereits durch die Glieder *erster* Ordnung in ψ des metrischen Tensors vollständig bestimmt.

Literatur:

Trautmanns Formulierung, Bedeutung der Killing-Vektoren für die Erhaltungssätze: Trautman [85, 87]; Uhlmann [93].

Formel (6,5): Brill [14].

Diracs Forderung: Dirac [19, 20, 21].

Zur Newtonschen Approximation siehe z. B. Jordan [46]; Landau, Lifshitz [55]; von Laue [56]; Weyl [99].

IV. Generalisierte dynamische Größen

1. Die zehn Erhaltungssätze der Speziellen Relativitätstheorie

Bekanntlich hängen die 10 Erhaltungssätze der SRT mit den 10 linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Lorentzgruppe zusammen.

Wir erhalten letztere durch Aufsuchen sämtlicher Killing-Vektoren des Minkowski-Raumes. Eine die Minkowski-Metrik charakterisierende Eigenschaft ist das Verschwinden des Krümmungstensors bzw. — was dasselbe ist — die Vertauschbarkeit der kovarianten Ableitungen:

$$\partial^i \partial^k = \partial^k \partial^i \tag{1,1}$$

Sei nun ξ^i ein Killing-Vektorfeld. Es ist dann $\partial^i \xi^k = -\partial^k \xi^i$, und deshalb und wegen (1,1) haben wir die Rechnung

$$\begin{aligned}\partial^s \partial^i \xi^k &= -\partial^s \partial^k \xi^i = -\partial^k \partial^s \xi^i = \partial^k \partial^i \xi^s = \partial^i \partial^k \xi^s \\ &= -\partial^i \partial^s \xi^k = -\partial^s \partial^i \xi^k,\end{aligned}$$

welche zeigt, daß

$$\partial^s \partial^i \xi^k = 0 \tag{1,2}$$

sein muß. In einem Lorentzschen KS folgt hieraus sofort

$$\xi^k = \alpha^k + \beta_l{}^k x^l \tag{1,3a}$$

Setzt man diesen Ausdruck in $\partial^i \xi^k = -\partial^k \xi^i$ ein, so findet man noch

$$\beta^{kl} + \beta^{lk} = 0 \text{ mit } \beta^{kl} = \beta_s{}^k g^{sl}. \tag{1,3b}$$

Wegen (1,3) besitzen wir also 10 frei wählbare Konstanten α^k, β^{kl}, und die von der Hyperfläche Ω unabhängigen Integrale

$$-\int_\Omega \xi^i T_{ik} \underline{a}\, d x^k \tag{1,4}$$

sind gerade die den allgemeinen Erhaltungssätzen unterliegenden dynamischen Größen.

Beispielsweise folgt aus $\xi^i = \delta_1{}^i$ in einem Lorentz-KS, daß (1,4) den in diesem System beobachteten Impuls in x^1-Richtung angibt. Betrachten wir als zweites Beispiel in einem Lorentz-KS x, y, z, ct eine Drehung um die z-Achse

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi)\, x &= x \cos\varphi + y \sin\varphi, \quad \sigma(\varphi)\, z = z,\\ \sigma(\varphi)\, y &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi, \quad \sigma(\varphi)\, t = t.\end{aligned}$$

Dann ist ξ^i in diesem KS durch

$$\xi^1 = \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sigma(\varphi)\, x^1 - x^1}{\varphi} = y, \quad \xi^2 = -x, \quad \xi^3 = \xi^0 = 0$$

gegeben und

$$-\int_\Omega \xi^i T_{ik} \underline{a}\, d x^k = \int_{t = \text{const.}} (y\, T_{10} - x\, T_{20})\, dx\, dy\, dz$$

ist tatsächlich der Drehimpuls um die z-Achse.

Es gilt somit (Trautmann):

Satz 11:

Sämtliche dynamischen Größen der SRT, die einem Erhaltungssatz genügen (d. h. die allgemeinen Integrale) werden durch die Ausdrücke

$$-\int_\Omega \xi^i T_{ik} \underline{a}\, d x^k \quad \text{mit} \quad \partial^k \xi^i + \partial^i \xi^k = 0$$

geliefert.

Damit ist der Inhalt der Ausdrücke (1,4) selbst in der SRT bei weitem noch nicht erschöpft. Eine wichtige Klasse von Erhaltungssätzen entsteht, wie schon Trautmann bemerkte, für den Fall, daß $T_i{}^i = 0$ ist. Dies ist in der Elektrodynamik der Fall. Es ist dann (1,4) eine erhalten bleibende Größe bereits, wenn

$$\partial^i \xi^k + \partial^k \xi^i = \alpha \cdot g^{ik}$$

mit einer beliebigen Funktion α ist; denn dann ist

$$(\partial^i \xi^k + \partial^k \xi^i)\, T_{ik} = \alpha \cdot g^{ik}\, T_{ik} = 0$$

Die Ausdrücke (1,4) geben Anlaß zu fünf weiteren erhalten bleibenden Größen, die gerade der (zusätzlichen) Invarianz der Elektrodynamik gegenüber den konformen Transformationen der Minkowski-Metrik entsprechen.

2. Generalisierte dynamische Größen

Nach den Erfahrungen der SRT und der allgemeinen Methode des Überganges zu beliebig gekrümmten Räumen können wir sinnvoll definieren:

Definition:

Unter einer *generalisierten dynamischen Größe* verstehen wir jeden Ausdruck der Form

$$P(\xi^i, \Omega) = -\int_\Omega \xi^i T_{ik} \underline{a}\, d x^k,$$

den wir näher als „Projektion des Energie-Impuls-Tensors aus das Vektorfeld ξ^i bezüglich der HFl Ω" bezeichnen können.

$P(\xi^i, \Omega)$ nennen wir kurz „die zu ξ^i gehörende" dynamische Größe.

Bei dieser Definition gehen wir vom Standpunkt von Beobachtern aus, die relativ zu Ω ruhen. Allgemein müßte nämlich die Größe

$$\int_\Omega \bar{\xi}^i T_{ik} \xi^k\, dV(\Omega) \tag{*}$$

definiert werden, wobei $\bar{\xi}_i \bar{\xi}^i = -1$ ein vorwärts gerichtetes normiertes Tangentenbündel von Beobachtern ist und ξ^k ein beliebiges Vektorfeld bezeichnet Nehmen wir relative Ruhe der Beobachter relativ zu Ω an, so ist $\bar{\xi}^i = -\bar{\eta}^i$, und wir erhalten gerade die obige Definition:

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \eta^i T_{ik} \xi^k\, dV(\Omega) &= -\int_\Omega \xi^k T_{ki} \eta^i\, dV(\Omega)\\ &= -\int_\Omega \xi^i T_{ik} \underline{a}\, d x^k.\end{aligned}$$

Insbesondere legt diese Definition eine weitere Deutung des Energieintegrals nahe, die, wie wir noch sehen werden, besonders den Zusammenhang der dynamischen Größen mit den Transformationsgruppen von M betont. Der Einfachheit halber beschäftigen wir uns im weiteren nicht mit dem allgemeinen Fall (*), sondern nur mit dem durch die Definition gegebenen.

Zu den dynamischen Größen gehört die Energie bei beliebiger Metrik sowie Impuls und Drehimpuls (SRT). Die generalisierten dynamischen Größen verallgemeinern also auch die impulsartigen Größen, weshalb die Einführung besonderer „Drehimpulspseudotensoren" überflüssig und nicht gerechtfertigt erscheint.

In Kapitel III haben wir schon genügend Vorbereitungen getroffen, um ohne weitere Rechnungen den folgenden Sachverhalt bestätigen zu können:

Satz 12:

Genau dann bleibt die dynamische Größe $P(\xi^i, \Omega)$ erhalten

$$P(\xi^i, \Omega) = P(\xi^i, \Omega')$$

für zwei beliebige Hyperflächen, wenn

$$T_{ik}\, \partial^i\, \xi^k = 0$$

ist.

$P(\xi^i, \Omega)$ ist ein „allgemeines Integral" genau dann, wenn ξ^i ein Killing-Feld ist.

Wir haben bereits bemerkt, daß beim Bestehen der Einsteinschen Gleichungen der Begriff des „allgemeinen Integrals" im Grunde leer ist, da die Metrik den Tensor T_{ik} bereits völlig bestimmt (während ohne die Einsteinschen Gleichungen *alle* bezüglich der Metrik divergenzfreien T_{ik} zur Konkurrenz zugelassen sind). Wir interessieren uns deshalb besonders für die Bedingung $T_{ik}\, \partial^i\, \xi^k = 0$.

Es ist leicht zu zeigen, daß eine Vielzahl von dynamischen Größen Erhaltungssätzen unterliegen, die an das betreffende physikalische System gebunden sind:

Satz 13:

Sei ξ^i ein beliebiges kontravariantes Vektorfeld. Dann gibt es (mindestens) eine Funktion α derart, daß die dynamische Größe $P(\bar{\xi}^i, \Omega)$ mit

$$\bar{\xi}^i = \alpha \cdot \xi^i$$

erhalten bleibt. Für α kann man überdies

$$\alpha > 0$$

vorschreiben.

In der Tat, setzen wir

$$\beta = T_{ik}\, \partial^i\, \xi^k, \quad \beta^i = T_k{}^i\, \xi^k$$

so ist für $T_{ik}\, \partial^i\, \bar{\xi}^k = 0$ notwendig und hinreichend, daß

$$\alpha \cdot \beta + \beta^i \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} = 0$$

ist. Setzen wir

$$e^\gamma = \alpha,$$

so muß also γ der inhomogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\beta + \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \gamma = 0 \qquad (**)$$

genügen. Diese aber ist — wenigstens lokal — stets lösbar. Ist γ eine reelle Lösung dieser Gleichung, so ist e^γ eine nirgends verschwindende positive Lösung von (*). Die Lösung von (**) kann durch Wahl eines geeigneten KS bekanntlich auf eine einfache Integration zurückgeführt werden: Zu jedem kontravarianten Vektorfeld ξ^i existiert nämlich (im Gegensatz zu den kovarianten Vektorfeldern!) ein KS derart, daß in seinem gesamten Gültigkeitsbereich das Vektorfeld die Komponenten $\delta_0{}^i$ besitzt. (Hierbei ist y^0 nicht notwendig zeitartig;). Dabei ist vorausgesetzt, daß das Vektorfeld in diesem Bereich in keinem Punkt verschwindet. Aus (**) entsteht dann einfach

$$\beta + \frac{\partial}{\partial x^1} \gamma = 0$$

Wir sehen aus Gleichung (*) überdies

Satz 14:

Erfüllt das Vektorfeld ξ^i die Relation

$$T_{ik}\, \partial^i\, \xi^k = 0,$$

so trifft dies auch für alle Vektorfelder

$$\bar{\xi^i} = \alpha_0 \cdot \xi^i$$

mit

$$\xi^k\, T_k{}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha_0 = 0$$

zu.

Es gibt also „genügend viele" Vektorfelder ξ^i derart, daß die dynamische Größe

$$P\,(\xi^i, \Omega)$$

von der HFl Ω unabhängig ist — also einem Erhaltungssatz unterliegt. Ob sich darunter auch stets Vektorfelder mit vorgegebenen Eigenschaften (z. B. $\xi_i\, \xi^i = -1$) befinden, ist damit allerdings nicht gesagt. Diese Probleme sind zum Teil wegen ihrer Nichtlinearität schwierig zu behandeln.

3. Eine Symmetrieeigenschaft der dynamischen Größen

Ist σ irgendeine eindeutige Abbildung von M auf sich und $A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ ein Tensor, so gibt seine Transformation mit σ wiederum einen Tensor, der mit $\sigma | A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ bezeichnet wurde. Dieser Tensor ist wie folgt definiert:

Sind $A^{j_1 \ldots}_{i_1 \ldots}$ die Komponenten des ursprünglichen Tensors im KS $\{x^i\}$, so hat $\sigma | A^{j_1 \ldots}_{i_1 \ldots}$ die Komponenten $\sigma\, A^{j_1 \ldots}_{i_1 \ldots}$ im KS $\{\sigma\, x^i\}$.

Überdecken sich die Gültigkeitsbereiche der KS $\{x^i\}$ und $\{\sigma\, x^i\}$, so gilt für die Komponenten bezüglich $\{x^i\}$:

$$\sigma | A^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \sigma\, A^{n_1 \ldots n_s}_{m_1 \ldots m_r} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \sigma x^{n_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial \sigma x^{n_s}} \cdot \frac{\partial \sigma x^{m_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \sigma x^{m_r}}{\partial x^{i_r}} \qquad (3{,}1)$$

Schreiben wir nun ausführlicher

$$P(\xi^i, g_{ik}, T_{ik}, \Omega) = -\int_\Omega \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\, x^k.$$

Aus der allgemein gültigen Formel

$$\int_{\Omega^\sigma} \Theta = \int_\Omega \sigma\, \Theta$$

folgt dann

$$P(\xi^i, g_{ik}, T_{ik}, \Omega^\sigma) = P(\sigma | \xi^i, \sigma | g_{ik}, \sigma | T_{ik}, \Omega). \quad (3{,}2)$$

Bestehen nun die Einsteinschen Gleichungen, so gilt zunächst auf Grund ihrer Struktur: Führt die Metrik g_{ik} auf den Energie-Impuls-Tensor T_{ik}, so führt die Metrik $\sigma | g_{ik}$ auf $\sigma | T_{ik}$. Aus $\sigma | g_{ik} = g_{ik}$ folgt deshalb $\sigma | T_{ik} = T_{ik}$. Also:

Satz 15:

Ist σ eine isometrische Abbildung und gelten die Einsteinschen Gleichungen, so besteht für ein beliebiges HFl-Stück Ω und ein beliebiges Vektorfeld ξ^i die Gleichung

$$P(\xi^i, \Omega^\sigma) = P(\sigma | \xi^i, \Omega). \qquad (3{,}3)$$

Diese Symmetrieeigenschaft der dynamischen Größen hat kein Analogon in der SRT. Eine andere Formulierung für (3,3) ist

$$P(\xi^i, \Omega) = P(\sigma | \xi^i, \Omega^{\sigma^{-1}}),$$

die aus (3,3) durch die Ersetzung $\Omega \to \Omega^{\sigma^{-1}}$ hervorgeht.

4. *Die dynamischen Größen als Diracsche Zustandsfunktionale*

Ω sei ein HFl-Stück, η_i das Normalenfeld von Ω und schließlich α^i ein Vektorfeld mit $\alpha^i \eta_i = 0$. In einem zu Ω und Q normales KS ist

$$\eta_i \equiv \delta_i^0, \quad \alpha^0 \equiv 0 \qquad (*)$$

sowie

$$R_{\nu 0} \equiv (\Gamma^{\mu}_{\nu\mu})_{,0} + (\Gamma^{0}_{\nu 0})_{,0} - (\Gamma^{0}_{0\nu})_{,0} - (\Gamma^{\lambda}_{0\nu})_{,\lambda}$$
$$\equiv \frac{1}{2} (g^{\lambda\sigma} g_{\lambda\sigma,\nu})_{,0} - \frac{1}{2} (g^{\lambda\sigma} g_{\nu\sigma,0})_{,\lambda},$$

wie man mit Hilfe der Formeln III (6,3) und III(6,4) leicht nachrechnet. Eben wegen dieser Formeln ist auch die Umformung

$$R_{\nu 0} \equiv \frac{1}{2} (g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\lambda,0})_{,\nu} - \frac{1}{2} (g^{\lambda\sigma} g_{\nu\sigma,0})_{,\lambda} \qquad (**)$$

in Ordnung. Beachten wir nun, daß die Ableitungen nach y^ν bzw. y^λ *ohne* Verlassen von Ω ausführbar sind. Wir finden daher, daß $R_{\nu 0}$ auf Ω ein Funktional des Zustandes der Metrik ist. Wegen (*) kann man also sagen:

Hilfssatz: $\alpha^i \eta^k R_{ik}$ ist auf Ω ein Zustandsfunktional der Metrik.

Wir formen nun (**) etwas um. Es ist

$$R_{ik} \eta^i \alpha^k \equiv -\alpha^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{2} (g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\lambda,0}) + \frac{1}{2} \alpha^\nu (g^{\lambda\sigma} g_{\nu\sigma,0})_{,\lambda}.$$

Es folgt wegen $\alpha^0 \equiv 0$

$$R_{ik} \eta^i \alpha^k \equiv -\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{2} \Omega_j{}^j + \frac{1}{2} \alpha^i (\Omega_i{}^k)_{,k}$$

Nun ist

$$\partial_k \Omega_i{}^k = (\Omega_i{}^k)_{,k} + \Gamma^k_{ks} \Omega_i{}^s - \Gamma^s_{ki} \Omega_s{}^k.$$

Betrachten wir den Ausdruck

$$\alpha^i \Omega_i{}^s \Gamma^k_{ks} - \alpha^i \Omega_s{}^k \Gamma^s_{ki} = A$$

und berücksichtigen wir, daß für ein zu Ω und Q normales KS

$$\Omega_{0\nu} \equiv \Omega_{\nu 0} \equiv \Omega_{00} \equiv \alpha^0 \equiv \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \equiv \Gamma^0_{00} \equiv \Gamma^0_{\nu 0} \equiv \Gamma^\nu_{00} \equiv 0$$

ist. Wir sehen dann, daß

$$A \equiv 0$$

ist. Damit haben wir aber die Formel

$$R_{ik} \eta^i \alpha^k = \frac{1}{2} \alpha^k (\partial_j \Omega_k{}^j - \partial_k \Omega_j{}^j) \text{ auf } \Omega \qquad (4,1)$$

gewonnen; denn da diese Gleichung in einem zu Ω und Q normalen KS gültig ist, ist sie wegen des Tensorencharakters ihrer beiden Seiten stets gültig, Eine nicht kovariante Form von (4,1) findet sich auch bei Brill. (Infolge eines Versehens steht bei Brill ein falscher Zahlenfaktor.) Sei nun ξ^i ein beliebiges Vektorfeld. Es gilt dann genau eine Zerlegung

$$\xi^i = \alpha^i + \lambda \eta^i \quad \text{mit} \quad \alpha^i \eta_i = 0, \qquad (4,2)$$

und zwar ist dabei

$$\lambda = -\xi^i \eta_i, \quad \alpha^i = \xi^i + \xi^k \eta_k \eta^i. \qquad (4,2\text{a})$$

Es folgt die Beziehung

$$\xi^k T_{ki} \eta^i = \alpha^k T_{ki} \eta^i - \xi^j \eta_j \eta^k T_{ki} \eta^i.$$

Wegen Formel (4,1) und (4,2) sowie nach Satz 6 haben wir deshalb:

Satz 16:

Für die Dichte

$$u = -\xi^k T_{ki} \eta^i$$

der zu ξ^i gehörenden dynamischen Größe gilt

$$2\varkappa u = -(\xi^k + \xi^s \eta_s \cdot \eta^k)(\partial_j \Omega_k{}^j - \partial_k \Omega_j{}^j)$$
$$- \xi^i \eta_j R(\Omega) + \frac{1}{4} \xi^j \eta_j (\Omega_i{}^i \Omega_j{}^j - \Omega_i{}^j \Omega_j{}^i).$$

Weiter folgt aus Satz 8 und unserem Hilfssatz das befriedigende Resultat:

Satz 17:

Die dynamischen Größen sind sämtlich Zustandsfunktionale bezüglich der Metrik.

5. *Dynamische Größen und Gruppentheorie*

A.

Ist $\sigma(\lambda)$ eine einparametrige Gruppe von Punkttransformationen auf M mit kanonisch gewähltem reellen Parameter λ:

$$\sigma(\lambda_1 + \lambda_2) = \sigma(\lambda_1)\, \sigma(\lambda_2), \quad \sigma(0) = 1, \qquad (5,1)$$

so können wir ihr ein kontravariantes Vektorfeld nach der Vorschrift

$$\{x^i\} \to \xi^i = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sigma(\lambda)\, x^i - x^i}{\lambda} \qquad (5,2)$$

zuordnen. Wir haben dann eine Beziehung

$$\sigma(\lambda) \to \xi^i \to P(\xi^i, \Omega) \qquad (5,3)$$

die den gewünschten Zusammenhang vermittelt; denn es gilt auch die folgende Umkehrung:

Ist ξ^i ein beliebiges kontravariantes Vektorfeld, so gibt es genau eine einparametrige Gruppe $\sigma(\lambda)$ mit kanonischem Parameter λ derart, daß (5,2) gilt.

Tatsächlich folgt aus (5,2) leicht, daß die Funktionen

$$\varphi^i (Q, \lambda) = \sigma(\lambda)\, x^i(Q) = x^i (Q^{\sigma(\lambda)}), \quad Q \in M \qquad (5,4\text{a})$$

das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{d\lambda} \varphi^i (Q, \lambda) = \xi^i (\varphi^1(Q, \lambda), \ldots) \text{ mit } \xi^i = \xi^i (x^1, \ldots) \qquad (5,4\text{b})$$

befriedigen. Andererseits hat dieses System genau eine Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi^i (Q, o) = x^i (Q) \qquad (5,4\text{c})$$

Diese Lösung definiert zusammen mit (5,4a) die Gruppe vollständig. Wir haben daher eine eineindeutige Zuordnung

$$\sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i \qquad (5,5)$$

und deshalb kann man

$$P(\sigma(\lambda), \Omega) = P(\xi^i, \Omega) \quad \text{falls } \sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i \qquad (5,6)$$

definieren.

B.

Ehe wir nochmals auf den Zusammenhang (5,6) eingehen, müssen wir noch die Ableitung eines Tensors $A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots}$ in Richtung eines kontravarianten Vektorfeldes besprechen.

Gilt der Zusammenhang (5,5), so definieren wir

$$L(\xi^i)\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} = L(\sigma(\lambda))\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\sigma(\lambda)\,|\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} - A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots}}{\lambda}, \tag{5,7}$$

wobei $\sigma\,|\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots}$ in IV. 3. definiert wurde.

Es ist eine sehr wichtige Tatsache, daß die Ableitung (5,7) von den herrschenden metrischen Verhältnissen *nicht* abhängt. Aus der in IV. 3. angegebenen Definition finden wir

$$L(\sigma(\lambda))\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} = \xi^l\,\frac{\partial}{\partial x^l}\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} + A^{j_1\cdots}_{l\,i_2\ldots}\,\frac{\partial \xi^l}{\partial x^{i_1}} + \cdots - A^{\,l j_2\ldots}_{i_1\ldots}\,\frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^l} - \cdots \tag{5,8}$$

In (5,8) ist die Unabhängigkeit von der Metrik offensichtlich. Wir können diese Unabhängigkeit jedoch auch „verstecken" und die partiellen Ableitungen überall durch die kovarianten Ableitungen ersetzen:

$$L(\sigma(\lambda))\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} = \xi^l\,\partial_l\,A^{j_1\cdots}_{i_1\ldots} + A^{j_1\cdots}_{l\,i_2\ldots}\,\partial_{i_1}\xi^l + \cdots - A^{\,l j_2\cdots}_{i_1\ldots}\,\partial_l\,\xi^{j_1} - \cdots \tag{5,9}$$

Denn (5,9) gilt zunächst in einem oskulierendem KS. Da (5,9) in einem solchen mit (5,8) übereinstimmt, gilt (5,9) als Tensorgleichung allgemein.

Aus (5,9) finden wir besonders leicht die nützlichen Formeln

$$\begin{aligned} L(\xi^i)\,g_{nm} &= \partial_n\,\xi_m + \partial_m\,\xi_n, \\ L(\xi^i)\,g^{nm} &= -(\partial^n\,\xi^m + \partial^m\,\xi^n)\,. \end{aligned} \tag{5,10}$$

Sie werfen einiges Licht auf die Bedeutung des Tensors Ω_{ik}. Nach (5,10) ist dieser Tensor die Beschränkung der Ableitung des metrischen Tensors in Richtung der Normalen von Ω.

Wegen (5,7) gibt Ω_{ik} also tatsächlich die Änderungsgeschwindigkeit der Metrik beim Verlassen von Ω in Richtung der Normalen an.

Bilden ganz allgemein gewisse geometrische Objekte Φ eine Darstellung der Gruppe der Punkttransformationen von M auf sich, so kann man (Linearität von Φ vorausgesetzt)

$$L(\xi^i)\,\Phi = L(\sigma(\lambda))\,\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\sigma(\lambda)\,\Phi - \Phi}{\lambda}$$

bilden (falls dieser Limes existiert). Jede solche Bildung heißt eine „Liesche Ableitung" (Slebodzinski 1931). Offenbar kann man abkürzend

$$L(\xi^i) = \left(\frac{d}{d\lambda}\,\sigma(\lambda)\right)_{\lambda=0} = 0$$

schreiben. Man sieht leicht: Ist zwischen zwei geometrischen Objekten Φ, Ψ eine Multiplikation erklärt, so gilt

$$L(\Phi\cdot\Psi) = (L\Phi)\cdot\Psi + \Phi\cdot L\Psi$$

falls

$$\sigma(\Phi\Psi) = \sigma\Phi\cdot\sigma\Psi$$

ist.

C.

Wir betrachten nun den sehr allgemeinen Fall, daß die Einsteinschen Gleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}\,R = -\varkappa\,T_{ik} \tag{5,11}$$

einen Teil der Eulerschen Gleichungen eines Variationsprinzips

$$\int_{M_0} \underline{a}\,L = \text{Extr.!} \tag{5,12}$$

(L skalar) bilden. Genauer gehöre (5,11) zur Variation von (5,12) nach dem metrischen Tensor. Wir nehmen nun weiter an, daß L die Gestalt

$$L = L_0 + \frac{1}{\varkappa}\,R \tag{5,13a}$$

hat und L_0 nur noch von den Feldgrößen und ihren ersten Ableitungen abhängt:

$$L_0 = L_0\,(g_{ik}, g_{ik,\,l}, \psi_a, \psi_{a,\,l}) \tag{5,13b}$$

Seien nun der metrische Tensor g_{ik} sowie die ψ_a zusätzlich noch von einem reellen Parameter λ abhängig

$$g_{ik} = g_{ik}\,(Q, \lambda)\,, \quad \psi_a = \psi_a\,(Q, \lambda)\,, \quad Q \in M_0\,,$$

und werde die Ableitung nach diesem Parameter durch einen Punkt gekennzeichnet.

Dann setzen wir in $\underline{a}L$ die vom Parameter λ abhängenden Feldgrößen ein und haben als Ausführung von (5,12)

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{M_0}\underline{a}\,L = 0 \quad \text{falls} \left.\begin{aligned} \dot g_{ik}\,(Q) &= 0 \\ \dot g_{ik,\,l}\,(Q) &= 0 \\ \dot\psi_a\,(Q) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } Q \in \text{Rand } M_0 \tag{5,14}$$

Es folgt nach bekannten Rechnungen, daß wir unter Verwendung von (5,11) als Definition für T_{ik} aus (5,14)

$$\int_{M_0} T_{ik}\,\dot g^{ik}\,\underline{a}\,1 = \frac{d}{d\lambda}\int_{M_0}\underline{a}\,L_0 = \int_{M_0} T^*_{ik}\,\dot g^{ik}\,\underline{a}\,1 \tag{5,15}$$

erhalten, wobei T^*_{ik} der symmetrische Energie-Impuls-Tensor von Rosenfeld ist, der nur mittels L_0 und mit Hilfe von Ableitungen nach nicht-metrischen Feldgrößen gebildet werden kann (Rosenfeld). Dieser Tensor ist die Verallgemeinerung des Belinfanteschen symmetrischen Energie-Impuls-Tensors für beliebige Metrik.

Infolge der Willkür der Variation ist natürlich

$$T_{ik} = T^*_{ik} \tag{5,16}$$

Betrachten wir nun den Ausdruck (5,15) für eine *beliebige* Variation $\dot g^{ik}$ der Metrik, die durch eine einparametrige Transformationsgruppe veranlaßt wurde. Sei weiter M_0 ein Raum-Zeit-Gebiet, das von zwei raumartigen HFl-Stücken derart begrenzt ist, daß der Rand von M_0 homolog $\Omega_2 - \Omega_1$ ist. Dann ist wegen (5,10) und infolge der Divergenzfreiheit von T^*_{ik} nach der Formel III (1,5b)

$$\begin{aligned}\int\limits_{M_0} T^*_{ik}\, \dot{g}^{ik}\, \underline{a}\, 1 &= -\int\limits_{M_0} T^*_{ik}\,(\partial^i \xi^k + \partial^k \xi^i)\, \underline{a}\, 1 \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \xi^i T^*_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k - \int\limits_{\Omega_2} \xi^i\, T^*_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k \\ &= P(\sigma(\lambda), \Omega_2) - P(\sigma(\lambda), \Omega_1) \qquad (5{,}17)\end{aligned}$$

Wegen (5,16) kann man an jeder Stelle dieser Rechnung T^*_{ik} durch T_{ik} ersetzen.

Wie Rosenfeld für den Fall der Spinoren und des Elektromagnetischen Feldes gezeigt hat, ergibt

$$-\int\limits_{\Omega} \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k = -\int\limits_{\Omega} \xi^i\, T^*_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k \qquad (5{,}18)$$

für ein ξ^i, das zu einer Drehung um eine Achse (SRT) gehört, nicht nur den „Bahndrehimpuls", sondern den Gesamtdrehimpuls. Weiter ist wegen der Identität des Belinfanteschen symmetrisierten Energie-Impuls-Tensors mit dem Tensor von Rosenfeld zumindest für die SRT klar, daß (5,18) für alle relativistischen Felder den Gesamtdrehimpuls liefert (siehe z. B. Umezawa). Auch hier sieht man, daß die $P(\sigma(\lambda), \Omega)$ eine geradlinige Verallgemeinerung auch des Begriffs des Drehimpulses geben.

Literatur:

Erhaltungssätze und Killing-Vektoren: [85, 87, 93 (Trautman, Uhlmann).

Diracsche Forderung: [19, 20, 21] (Dirac).

Dynamische Größen und allgemeine Transformationsgruppen: siehe z. B. Bergmann [7, 8]; Komar [54].

Dynamische Größen und Lagrange-Formalismus: Belinfante [6]; Eddington [22]; Einstein [24, 25, 27]; Goldberg [37]; Hilbert [38]; Hill [40]; Hund [42]; Jordan [46]; Landau, Lifshitz [55]; von Laue [56]; Mizkjewitsch [62]; Noether [68]; Rosenfeld [72]; Schrödinger [76]; Swann [77]; Trautman [85]; Umezawa [96]; Weyl [99]; De Witt [102].

V. Die generalisierten dynamischen Größen in der Quantentheorie

1. Die Vertauschungsregeln der dynamischen Größen in der speziell-relativistischen Quantentheorie

In der Quantentheorie ist es üblich, die Lorentz-Transformationen durch Festhalten des Weltpunktes und Variation des Lorentzschen KS einzuführen. Wegen

$$\sigma\, x^i\,(Q) = x^i\,(Q^\sigma) \qquad (1{,}1)$$

ist dieser Vorgang völlig demjenigen äquivalent, bei dem der Weltpunkt einer Punkttransformation unterworfen wird und das KS fest bleibt. Bei Benützung beliebiger KS (oder später bei von der Minkowskischen abweichenden Metrik) verschwinden gewisse Vorteile der ersteren Betrachtungsweise mehr und mehr. (Diese Vorteile haben in der Linearität des Transformationsgesetzes für Lorentzsche KS ihren Grund.) Für das Folgende ist es daher zweckmäßig, die Lorentzgruppe als eine Gruppe von Punkttransformationen zu betrachten, deren Transformationen die Weltpunkte untereinander permutieren.

Sei $|>$ ein Zustandsvektor im Heisenberg-Bild und σ eine Lorentz-Transformation. (Wir betrachten die eigentlichen inhomogenen Lorentz-Transformationen.) In Analogie zu (1,1) ist ein Zustandsvektor $U(\sigma)\,|>$ wie folgt definiert:

Ein Beobachter im Bezugssystem $\{\sigma x^i\}$ beobachtet beim Vorliegen des Zustandes $|>$ genau dasselbe wie ein Beobachter im Bezugssystem $\{x^i\}$ beim Vorliegen des Zustandsvektors $U(\sigma)\,|>$ (siehe z. B. Schweber-Bethe-de Hoffmann). Da die $\{x^i\}$ hier Lorentz-KS sind, ist mit dieser Aussage ein klarer geometrischer Sinn verknüpft.

Ist nun $\sigma(\lambda)$ eine einparametrige Untergruppe der Lorentzgruppe und $P\,(\sigma(\lambda), \Omega) = P\,(\sigma(\lambda)$ die klassisch beobachtbare Größe[8]), so ist der korrespondierende Operator $\underline{P}(\sigma(\lambda))$, für den

$$P\,(\sigma(\lambda)) = <|\,\underline{P}\,(\sigma(\lambda))\,|> \qquad (1{,}2)$$

gilt, durch

$$U\,(\sigma(\lambda)) = E + i\,\lambda\,\underline{P}\,(\sigma(\lambda)) + \langle\lambda^2\rangle$$

gegeben. Das heißt

$$\underline{P}\,(\sigma(\lambda)) = \frac{1}{i} \lim_{\lambda\to 0} \frac{U\,(\sigma(\lambda)) - E}{\lambda} \qquad (1{,}3)$$

und $i\,\underline{P}\,|>$ ist die „Liesche Ableitung" des Zustandsvektors $|>$ bezüglich der Untergruppe $\sigma(\lambda)$. Es folgt hieraus zwangsläufig (siehe hierzu den nächsten Abschnitt), daß die Operatoren $\underline{P}(\sigma(\lambda))$ eine Darstellung der Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe bilden. Setzt man an Stelle der $\sigma(\lambda)$ die zugehörenden Vektorfelder ξ^i, so gelten deshalb die Vertauschungsrelationen

$$i\,[\underline{P}(\xi^i),\ \underline{P}(\eta^i)] = \underline{P}\,(\zeta^i) \qquad (1{,}4\text{a})$$

mit $$\zeta^i = \xi^l\,\frac{\partial}{\partial\,x^l}\,\eta^i - \eta^l\,\frac{\partial}{\partial\,x^l}\,\xi^i. \qquad (1{,}4\text{b})$$

(1,4) enthält sämtliche zwischen den Operatoren der dynamischen Größen bestehenden Vertauschungsrelationen, wenn man ξ^i und η^i die infinitesimalen Transformationen der Lorentz-Gruppe durchlaufen läßt[9]).

Wir betrachten nun irgendeinen Operator A. Auf Grund der Definition von $U(\sigma)|>$ ist es möglich, für jede eigentliche inhomogene Lorentztransformation σ einen zweiten Operator A^σ durch

$$<1\,|\,A^\sigma\,|\,1> = <|\,A\,|> \text{ mit } U(\sigma)\,|> = |\,1> \qquad (1{,}5\text{a})$$

zu definieren (siehe z. B. Bogoliubow-Shirkov). Es folgt

$$A^\sigma = U^{*-1}(\sigma)\,A\,U^{-1}(\sigma) = U(\sigma)\,A\,U^{-1}(\sigma). \qquad (1{,}5\text{b})$$

Betrachten wir nun eine einparametrige Untergruppe $\sigma(\lambda)$ mit kanonischem Parameter λ, so folgt wegen

$$U^{-1}(\sigma(\lambda)) = U(\sigma^{-1}(\lambda)) = U(\sigma(-\,\lambda))$$

die Gleichung

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{A^{\sigma(\lambda)} - A}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{U\,(\sigma(\lambda)) - E}{\lambda}\,A + A \lim_{\lambda\to 0} \frac{U\,(\sigma\,(\lambda)) - E}{\lambda}$$

Links steht die Liesche Ableitung von A (siehe IV. 5.) und rechts steht wegen (1,3) der Kommutator von A mit dem der Gruppe $\sigma(\lambda)$ entsprechenden dynamischen Operator:

$$[A,\,\underline{P}(\sigma(\lambda))] = i\,L(\sigma(\lambda))\,A. \qquad (1{,}6)$$

Betrachten wir als Anwendung etwa ein lokales skalares Quantenfeld $\varphi(Q)$. Für dieses gilt

$$U\,(\sigma)\,\varphi\,(Q)\,U\,(\sigma^{-1}) = \varphi\,(Q^\sigma) \qquad (1{,}7\text{a})$$

und daher

$$L(\sigma(\lambda))\,\varphi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\,\varphi\,, \qquad (1{,}7\,\mathrm{b})$$

falls ξ^i zu $\sigma(\lambda)$ gehört. Analog findet man (siehe IV.5.) die Liesche Ableitung eines tensoriellen Quantenfeldes.

Für einen Spinor erhält man die entsprechende Liesche Ableitung als

$$L(\sigma(\lambda))\,\psi_a = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\,\psi_a + \frac{1}{8}\,(\partial^i \xi^k)\cdot(\gamma_i\,\gamma_k - \gamma_k\,\gamma_i)\,\psi_a \qquad (1{,}8)$$

in einem Lorentz-KS. Nach IV (1,3) ist $\partial^i\,\xi^k$ ein schiefsymmetrischer konstanter Tensor a^{ik}, woraus man die Übereinstimmung von

$$[\psi_a, \underline{P}(\sigma(\lambda))] = i\,L(\sigma(\lambda))\,\psi_a \qquad (1{,}8\,\mathrm{a})$$

mit der üblichen Formulierung der Vertauschungsrelationen auch für diesen Fall sieht[10]).

Wie bereits bemerkt, gilt für die klassischen Größen

$$P(\sigma(\lambda)) = -\int_\Omega \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k. \qquad (1{,}9\,\mathrm{a})$$

Ist andererseits T_{ik} der quantisierte symmetrische Energie-Impuls-Tensor (Belinfante-Rosenfeld-Tensor), so weiß man ebenfalls, daß

$$\underline{P}(\sigma(\lambda)) = -\int_\Omega \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k \qquad (1{,}9\,\mathrm{b})$$

gilt (siehe z. B. Umezawa).

Beim Übergang zu einer beliebigen Metrik hat man u. a. die Tatsache zu berücksichtigen, daß die Anzahl der linear unabhängigen Killing-Vektoren (d. h. die Zahl der Symmetrien) kleiner wird bzw. verschwindet. Deshalb sind die Ausführungen dieses Abschnittes nicht ohne weitere Untersuchungen geeignet, eine Verallgemeinerung für beliebige Metrik zu sichern. Andererseits legt die hier gewählte kompakte Form der Vertauschungsregeln der dynamischen Größen eine bestimmte Form der Verallgemeinerung nahe.

2. Die Lie-Algebra der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M

Sei $\Gamma(M)$ die Gesamtheit aller eineindeutigen (beliebig oft differenzierbaren) Abbildungen von M auf sich. $\Gamma(M)$ ist natürlich eine Gruppe. Allerdings ist die Zahl ihrer Parameter nicht endlich, wie dies bei den Liegruppen (z. B. der Lorentzgruppe) der Fall ist, sondern sogar von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Trotzdem ist es relativ einfach, zu $\Gamma(M)$ eine Lie-Algebra zu konstruieren. Wir definieren sie wie folgt:

Die Elemente von $L(M)$ sind die einparametrigen, auf kanonische Parameter bezogenen Untergruppen von $\Gamma(M)$.

Sind dann $\sigma(\lambda)$, $\tau(\lambda)$ zwei solche Untergruppen, so existieren genau zwei andere Untergruppen $\varrho(\lambda)$, $\varkappa(\lambda)$ derart, daß

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varrho\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\sigma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\tau\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]^n = \mathbf{1} \qquad (2{,}1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varkappa\left(-\frac{n^2}{\lambda^2}\right)\sigma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\tau\left(\frac{\lambda}{n}\right)\sigma\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\tau\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right]^{n^2} = \underline{1}$$

ist. (2,2)

Wir setzen dann

$$\varrho(\lambda) = \sigma(\lambda) + \tau(\lambda) \qquad (2{,}3)$$

$$\varkappa(\lambda) = \sigma(\lambda)\; o\; \tau(\lambda) \qquad (2{,}4)$$

Damit sind in $L(M)$ zwei Operationen $+$ und o erklärt.

Es gilt nun

Satz 18:

$L(M)$ ist eine Liesche Algebra bezüglich der Operationen (2,3) und (2,4); sowie

Satz 19:

Für die Liesche Ableitung beliebiger geometrischer Objekte gilt

$$L(\sigma(\lambda) + \tau(\lambda)) = L(\sigma(\lambda)) + L(\tau(\lambda)), \qquad (2{,}5)$$

$$L(\sigma(\lambda)\, o\, \tau(\lambda)) = L(\sigma(\lambda))\cdot L(\tau(\lambda)) - L(\tau(\lambda))\, L(\sigma(\lambda)) \qquad (2{,}6)$$

Die Lieschen Ableitungen sind somit Darstellungen der Lie-Algebra $L(M)$.

Den Beweis wollen wir nur skizzieren, da dann die genauere Ausführung offensichtlich ist. Wir denken uns hierzu die Gleichungen (2,1) und (2,2) auf ein geometrisches Objekt Φ angewendet. Nach IV. 5 gilt bei geeigneter Differenzierbarkeitsvoraussetzung

$$\sigma(\lambda)\,\Phi = \Phi + \lambda\cdot L(\sigma(\lambda))\cdot\Phi + \langle\lambda^2\rangle$$

Es folgt, daß

$$\varrho\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\sigma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\tau\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Phi = \Phi + \frac{\lambda}{n}\,(L(\sigma) + L(\tau) - L(\varrho))\,\Phi + \left(\frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$

bzw.

$$\left[\varrho\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\sigma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\tau\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]^n\Phi = \Phi + \left(\lambda + \frac{1}{2}\,\lambda^2\right)[L(\sigma) + L(\tau) - L(\varrho)]\,\Phi + \left(\frac{\lambda^2}{n}\right)$$

ist. Das heißt für (2,1) ist

$$L(\varrho) = L(\sigma) + L(\tau)$$

notwendig. Wegen der eineindeutigen Beziehung $\sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i$ kann man hierfür auch

$$L(\zeta^i) = L(\xi^i) + L(\eta^i)$$

schreiben. Wenden wir die L z. B. auf Funktionen (Skalare) an, so sieht man, daß das Vektorfeld ζ durch $\sigma(\lambda)$ und $\tau(\lambda)$ eindeutig bestimmt ist.

Die Konstruktion von $\varrho(\lambda)$ verläuft dann wie folgt:

$$\sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i, \quad \tau(\lambda) \longleftrightarrow \eta^i.$$
$$\zeta^i = \xi^i + \eta^i$$
$$\zeta^i \longleftrightarrow \varrho(\lambda)$$

Analog beweist man Gleichung (2,2) durch Überführung in Gleichung (2,6) und Anwendung dieser Gleichungen auf die Lie-Ableitungen von skalaren Feldfunktionen. Hierbei muß man von der genaueren Abschätzung

$$\sigma(\lambda)\,\Phi = \Phi + \lambda\,L(\sigma(\lambda))\,\Phi + \frac{\lambda^2}{2}\,L^2(\sigma(\lambda))\,\Phi + \langle\lambda^3\rangle$$

ausgehen. Als Nebenergebnis erhalten wir den für die Anwendungen nützlichen Satz

Satz 19a:
Gilt

$$\sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i, \quad \tau(\lambda) \longleftrightarrow \eta^i, \tag{2,7a}$$

so folgt

$$\sigma(\lambda) + \tau(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i + \eta^i \tag{2,7b}$$

$$\sigma(\lambda)\, o\, \tau(\lambda) \longleftrightarrow \xi^s \frac{\partial}{\partial x^s} \eta^i - \eta^s \frac{\partial}{\partial x^s} \xi^i \tag{2,7c}$$

Eine besondere Rolle spielen die zu einer Metrik ds^2 isometrischen einparametrigen Gruppen $\sigma(\lambda)$. Aus

$$\sigma(\lambda)\, ds^2 = ds^2 \longleftrightarrow L(\sigma(\lambda))\, g_{ik} = 0 \tag{2,8}$$

folgt wegen (2,5) und (2,6), daß die Operationen (2,3) und (2,4) isometrische einparametrige Gruppen in Gruppen überführen, die wieder isometrisch sind.

Aus dem in V. 1. Mitgeteilten folgt, daß die Zuordnung

$$\sigma(\lambda) \to \underline{P}(\sigma(\lambda)), \quad L(\sigma(\lambda))\, g_{ik} = 0 \tag{2,9}$$

eine Darstellung der durch (2,8) definierten Teil-Algebra der Lie-Algebra $L(M)$ ist.

Leider nutzt diese Tatsache fast nichts, wenn wir zu einer von der Minkowski-Metrik verschiedenen Metrik übergehen; denn dann existieren Gruppen der Eigenschaft (2,8) nur in Ausnahmefällen. Auf der anderen Seite dürfte die Existenz der Quantentheorie nicht mit der speziellen Form des Minkowskischen Linienelements stehen und fallen. Es folgt, daß es eine Möglichkeit geben muß, die Abbildung (2,9) über die Bedingung (2,8) hinaus so fortzusetzen, daß die fortsetzende Abbildung die Struktur der Lie-Algebra weitgehend erhält.

3. *Ein Beispiel*

Wir betrachten bei beliebiger Metrik g_{ik} ein (pseudo-)skalares Feld φ mit der Lagrange-Funktion

$$L = g^{ik} \varphi_i \varphi_k + \Sigma \lambda_m \varphi^m, \quad \varphi_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi \tag{3,1}$$

Es ist

$$T_{ik} = \frac{\delta L}{\delta g^{ik}} - \frac{1}{2} g_{ik} L = \varphi_i \varphi_k - \frac{1}{2} g_{ik} L. \tag{3,2}$$

Später benötigen wir, daß

$$\begin{aligned} :L: &= L + \Sigma \lambda'_m \varphi^m \\ :T_{ik}: &= T_{ik} + \Sigma \lambda''_m \varphi^m \end{aligned} \tag{3,3}$$

mit (uneigentlichen) c-Zahlen λ'_m, λ''_m ist.

Sei Ω eine raumartige HFl, η_k das vorwärts gerichtete Normalenfeld von Ω und $dV(\Omega)$ das zu Ω gehörende invariante Volumenelement. Man hat dann die Formeln

$$\int_\Omega f\, [\varphi, \varphi(Q)]\, dV(\Omega) = 0, \; Q \in \Omega \tag{3,4}$$

$$\int_\Omega f \eta^k\, [\varphi_k, \varphi(Q)]\, dV(\Omega) = i f(Q), \quad Q \in \Omega \tag{3,5}$$

$$\int_\Omega f \alpha^k\, [\varphi_k, \varphi(Q)]\, dV(\Omega) = 0 \quad \text{für } \alpha_k \eta^k = 0 \text{ und } Q \in \Omega \tag{3,6}$$

Diese Formeln sind von L unabhängig, da Ω raumartig ist und die zu L gehörende Feldgleichung die Gestalt $\Box \varphi = F(\varphi)$ besitzt: Auf Ω kann φ und $\eta^k \varphi_k$ vorgeschrieben werden. Wir wollen nun mit einem beliebigen Vektorfeld ξ^i

$$A = [\underline{P}(\xi^i, \Omega), \varphi(Q)], \quad Q \in \Omega$$

mit

$$\underline{P}(\xi^i, \Omega) = -\int_\Omega \xi^i : T_{ik} : \underline{a}\, dx^k = -\int_\Omega \xi^i : T_{ik} : \underline{a}\, dV(\Omega) \tag{3,7}$$

berechnen. Dabei gehen wir von

$$A' = -\int_\Omega [\xi^i\, T_{ik}\, \eta^k, \varphi(Q)]\, dV(\Omega)$$

aus und beachten (3,4). Wegen dieser Relation und wegen (3,2) spielt die Summe $\Sigma \lambda_m \varphi^m$ in L bei der Bildung von A keine Rolle, und analog ist es wegen (3,3) gleichgültig, ob T_{ik} oder $:T_{ik}:$ in die Rechnung eingesetzt wird. Also

$$A = A'$$

und

$$A = -\int_\Omega \xi^i \eta^k \left[\varphi_i \varphi_k - \frac{g_{ik}}{2} \varphi_s \varphi_l g^{sl}, \varphi(Q)\right] dV(\Omega).$$

Wir erhalten

$$A = -\int_\Omega \{\xi^i \varphi_i \eta^k [\varphi_k, \varphi(Q)] + \eta^i \varphi_i \xi^k [\varphi_k, \varphi(Q)] - \xi^i \eta_i \varphi_s g^{sl} [\varphi_l, \varphi(Q)]\}\, dV(\Omega).$$

Nach Formel (3,5) gibt der erste Summand $i \xi^i(Q) \cdot \varphi_i(Q)$. Der zweite und dritte Summand schreibt sich

$$-\int_\Omega \alpha^i\, [\varphi_i, \varphi(Q)]\, dV(\Omega)$$

mit

$$\alpha^i = \eta^s \varphi_s \cdot \xi^i - \xi^l \eta_l \varphi_s g^{si}.$$

Man sieht, daß $\alpha^i \eta_i = 0$ ist und deshalb tritt Formel (3,6) in Kraft und das fragliche Integral ist Null.

Insgesamt gilt also mit der Definition (3,7)

$$[\underline{P}(\xi^i, \Omega), \varphi] = -i \xi^i \varphi_i \equiv -i L(\xi^i)\, \varphi, \quad Q \in \Omega \tag{3,8}$$

Diese Formel geht in der Tat in (1,6) über, wenn ξ^i ein Killing-Vektor ist. In diesem Fall ist die *zusätzliche* Bedingung $Q \in \Omega$ überflüssig. Für beliebige Vektorfelder dürfte (3,8) jedoch neu sein.

Natürlich können wir auch

$$i\, [\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega), \varphi] = L(\sigma(\lambda))\, \varphi; \quad Q \in \Omega \tag{3,8a}$$

an Stelle von (3,8) schreiben. Man sieht ohne Schwierigkeiten, daß der Beweisgang nicht gestört wird, wenn an Stelle von φ seine „positiven" bzw. „negativen" Teile φ^+ und φ^- stehen.

Auf Grund von (3,7) und Satz 19a ist unmittelbar klar, daß

$$\underline{P}(\sigma(\lambda) + \tau(\lambda), \Omega) = \underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega) + \underline{P}(\tau(\lambda), \Omega) \tag{3,9}$$

gilt. Wir betrachten nun drei Gruppen $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$ und $\sigma_3(\lambda)$, für die

$$\sigma_1(\lambda)\, o\, \sigma_2(\lambda) = \sigma_3(\lambda) \tag{3,10a}$$

gilt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\underline{P}(\sigma_k(\lambda), \Omega) = \underline{P}_k; \; L(\sigma_{(k)}(\lambda)) = L_k \tag{3,10b}$$

Auf Grund von (3,8) bzw. (3,8a) haben wir für $Q \in \Omega$

$$L_2 L_1 \varphi = i L_2 [\underline{P}_1, \varphi] = -[\underline{P}_2, [\underline{P}_1, \varphi]].$$

Wir erhalten

$$[L_1, L_2]\,\varphi = [\underline{P}_2, [\underline{P}_1, \varphi]] - [\underline{P}_1, [\underline{P}_2, \varphi]]$$

und durch eine einfache Umformung

$$[L_1, L_2]\,\varphi = -[[P_1\, P_2], \varphi].$$

Nun ist aber die linke Seite dieser Gleichung gleich $L_3\,\varphi$ wegen (2,6). Wir haben also unter Benutzung von (3,8a)

$$[i\,[\underline{P}_1, \underline{P}_2], \varphi] = [\underline{P}_3, \varphi]$$

Diese Formel gilt ihrer Herleitung nach auch für φ^+ und φ^-. Wir können hieraus schließen (unter der Voraussetzung, daß sich alle Zustände aus einem Vakuumzustand $|\,0>$ mittels der φ^+ herleiten lassen und $P_k\,|\,0> = 0$ ist), daß

$$i\,[\underline{P}_1, \underline{P}_2] = \underline{P}_3 \qquad (3,10\,c)$$

gilt. (3,10c) ist die gesuchte Verallgemeinerung der grundlegenden Vertauschungsrelation (1,4) für *beliebige* Gruppen.

Satz 20:

Für ein quantisiertes (pseudo-)skalares neutrales Feld φ mit einer Lagrange-Funktion

$$L = g^{ik}\,\varphi_i\,\varphi_k + \Sigma\,\lambda_m\,\varphi^m$$

gilt bei beliebiger Metrik: Ist

$$\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega) = -\int_\Omega \xi^i : T_{ik} : \underline{a}\; d\,x^k,\ \sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i,$$

so ist die Zuordnung

$$\sigma(\lambda) \to i\,\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)$$

eine Darstellung der Lie-Algebra $L(M)$. Für ein beliebiges nur von φ^+ und φ^- abhängendes Quantenfeld Φ gilt

$$i\,[\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega), \Phi] = L(\sigma(\lambda))\,\Phi \quad \text{für } Q \in \Omega\,.$$

Diese Relation dürfte selbst für den Fall der SRT neu sein. Das Einschränkende gegenüber der üblichen Formulierung beim Vorliegen isometrischen Gruppen besteht in der Forderung $Q \in \Omega$. Man sieht: Ist $\sigma(\lambda)$ isometrisch, so ist $\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)$ von der Wahl der HFl unabhängig und die Bedingung $Q \in \Omega$ ist von selbst erfüllt, weil jeder Weltpunkt in (mindestens) einer HFl liegt.

4. *Vermutung über die Vertauschungsrelationen der $\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)$*

Wir haben schon bei der Besprechung der Lokalisierbarkeit der generalisierten dynamischen Größen $P(\sigma(\lambda), \Omega)$ diese als im Prinzip beobachtbar angenommen. Es müßte deshalb in der Quantentheorie Operatoren $\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)$ geben mit

$$P(\sigma(\lambda), \Omega) = <|\,\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)\,|> \text{ mit } <|> = 1\,. \quad (4,1)$$

Aus Korrespondenzgründen wird man weiterhin

$$\underline{P}\,(\sigma(\lambda), \Omega) = -\int_\Omega \xi^i : T_{ik} : \underline{a}\, d\,x^k \qquad (4,2)$$

annehmen.

Man wird nun vermuten, daß folgendes Axiom in der relativistischen Quantentheorie stets erfüllt ist:

Axiom: Die Zuordnung

$$\sigma\,(\lambda) \to i\,\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)$$

ist eine Darstellung der Lie-Algebra $L(M)$.

Dabei stützen wir uns auf folgende Argumente.

a) Das Axiom ist richtig in der SRT für isometrische Gruppen.

b) Die Aussage des Axioms ist unabhängig von den herrschenden metrischen Verhältnissen. Dies legt die Vermutung nahe, daß es auch nicht spezielle metrische Strukturen (Minkowski-Metrik) bzw. spezielle metrische Eigenschaften (Isometrie von Gruppen) zur Voraussetzung hat.

c) Das Axiom gilt bei beliebiger Metrik für (pseudo)-skalare Felder (Satz 20).

d) Man sieht aus dem Beweis von Satz 20, daß das tragende Argument die Eigenschaften von $[\varphi(Q), \varphi(Q')]$ auf raumartige HFl Ω waren. Das heißt der Beweis wird durch gewisse Kausalitätsforderungen erzwungen, die ihrem Charakter nach nicht von Typ des quantisierten Feldes abhängen sollten. Die Vertauschungsregeln zwischen den $\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega)$ sollten deshalb wegen ihres Zusammenhanges mit den Kausalitätsforderungen ebenfalls nicht an die spezielle Gestalt der Felder und ihrer Kopplungen gebunden sein.

Wir wollen nun versuchen, aus dem Axiom das Analogon zu Formel (3,8) bzw. (1,6) herzuleiten. Sei $\sigma(\lambda)$ eine einparametrische Gruppe mit kanonischem Parameter und Ω eine raumartige HFl. Wir ordnen jedem Operator A einen Operator $\tilde{L}\,(\sigma, \Omega)\,A$ zu:

$$A \to \tilde{L}(\sigma, \Omega)\,A\,,\ \sigma = \sigma(\lambda) \qquad (4,3)$$

durch die Vorschrift

$$\tilde{L}\,(\sigma, \Omega)\,A = i\,[\underline{P}(\sigma, \Omega), A],\ \sigma = \sigma(\lambda) \qquad (4,4)$$

Wir untersuchen die Eigenschaften dieser Abbildungen der Operatoren in sich.

Zunächst sieht man, daß $\tilde{L}(\sigma, \Omega)$ eine *lineare* Abbildung ist

$$\tilde{L}\,(\sigma, \Omega)\,(\alpha_1\,A_1 + \alpha_2\,A_2) = \alpha_1\,\tilde{L}(\sigma, \Omega)\,A_1 + \alpha_2\,\tilde{L}\,(\sigma, \Omega)\,A_2 \qquad (4,5)$$

Aus (4,2) folgt mit Hilfe des Satzes (19a) weiterhin

$$\tilde{L}(\sigma(\lambda) + \tau(\lambda), \Omega) = \tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega) + \tilde{L}(\tau(\lambda), \Omega). \quad (4,6)$$

Setzen wir nun abkürzend

$$\underline{P}_i = \underline{P}(\sigma_i(\lambda), \Omega),\quad \tilde{L}_i = \tilde{L}(\sigma_i(\lambda), \Omega)$$

und betrachten den Fall, daß

$$\sigma_1(\lambda)\ o\ \sigma_2(\lambda) = \sigma_3(\lambda)$$

ist. Aus unserem Axiom folgt dann

$$\underline{P}_3 = i\,[\underline{P}_1, \underline{P}_2]$$

Nun ziehen wir die Identität

$$[[\underline{P}_1, \underline{P}_2], A] = [\underline{P}_1\,[\underline{P}_2, A]] - [\underline{P}_2, [\underline{P}_1, A]]$$

heran. Nach (*) wird

$$-\,i\,[\underline{P}_3, A] = [\underline{P}_1, [\underline{P}_2, A]] - \underline{P}_2, [\underline{P}_1, A]]\,.$$

Nach Definition (4,4) ist diese Formel mit

$$\tilde{L}_3\,A = \tilde{L}_1\,\tilde{L}_2\,A - \tilde{L}_2\,\tilde{L}_1\,A.$$

identisch. Wir haben folglich

$$\tilde{L}(\sigma(\lambda)\ o\ \tau(\lambda), \Omega) = [\tilde{L}(\sigma(\lambda)\,\Omega),\ \tilde{L}(\tau(\lambda), \Omega)]\,. \quad (4,7)$$

Schließlich folgt aus $\underline{P}^* = \underline{P}$

$$(\tilde{L}\,A)^* = -i\,[\underline{P}, A]^* = -i\,[A^*, \underline{P}] = i[\underline{P}, A^*]$$

und somit

$$\{\tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega)\,A\}^* = \tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega)\,A^*. \qquad (4{,}8)$$

Aus der Definition (4,4) schließen wir auf Grund der Identität

$$[a\,b, c] = a\,[b, c] + [a, c]\,b$$

noch auf die bemerkenswerte Beziehung

$$\tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega)\,(A\,B) = A\,\tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega)\,B + \tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega)\,A \cdot B \qquad (4{,}9)$$

Eine lineare Abbildung $\tilde{L}$ mit dieser Eigenschaft nennt man kurz eine *Ableitung.*

Satz 21:

Gilt Axiom I und bezeichnet R die Algebra der Operatoren einer Quantentheorie, so ist die lineare Abbildung

$$A \to i\,[P(\sigma(\lambda), \Omega), A] = \tilde{L}(\sigma(\lambda), \Omega)\,A, \quad A \in R$$

für eine feste raumartige Hyperfläche

1. eine Ableitung
2. eine Darstellung der Lie-Algebra $L(M)$
3. mit der antilinearen Abbildung

$$A \to A^*$$

vertauschbar.

Betrachten wir nun ein quantisiertes Feld $\Phi = \{\Phi\}$ d. h. ein quantisiertes geometrisches Objekt. Ist $\sigma(\lambda)$ eine einparametrige Gruppe, so können wir durch

$$L\,(\sigma(\lambda)\,\Phi = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sigma(\lambda)\,\Phi - \Phi}{\lambda}$$

ein neues quantisiertes Feld herleiten. Also z. B. $L(\sigma(\lambda))\,\varphi = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \varphi$, falls φ ein skalares Feld ist. Aus den Untersuchungen von IV. 5. wissen wir, daß die Abbildung

$$\Phi \to L\,\Phi \qquad (4{,}10)$$

sowohl eine Darstellung der Lie-Algebra $L(M)$ als auch eine Ableitung ist

$$L(\Phi\psi) = \Phi L\psi + L\Phi \cdot \psi.$$

Andererseits ist auch

$$(L\,\Phi)^* = L\,\Phi^*.$$

Die Abbildung (4,10) hat also alle drei in Satz 21 genannten Eigenschaften. Es erscheint daher folgende Definition angebracht:

Definition:

Ein quantisiertes Feld $\Phi = \{\Phi_i\}$ heißt *lokal*, wenn für jede raumartige Hyperfläche Ω

$$L(\sigma(\lambda))\,\Phi(Q) = i\,[\underline{P}(\sigma(\lambda), \Omega), \Phi(Q)] \text{ für } Q \in R \quad (4{,}11)$$

ist.

Wir bemerken, daß die so verstandene Lokalität nicht mit Notwendigkeit aus unserem Axiom folgt. Andererseits wissen wir (siehe z. B. Bethe-Schweber-de Hoffmann), daß ein in diesem Sinne lokales Feld zusammen mit den Forderungen nach Spektralität und Vollständigkeit des Hilbert-Raumes der Zustände zu dem Theorem von Lehmann-Källên und seinen Konsequenzen führt.

Mit Formel (4,11) sind wir also zu einer in jeder quantisierten Feldtheorie (wenigstens im Prinzip) nachprüfbaren Bedingung für die Lokalisierbarkeit eines Feldes gekommen.

Literatur:

Bergmann and Brunnings [8]; Bethe, Schweber and de Hoffmann [11]; Bogoliubov and Shirkov [13]; Deser [18]; Goldberg [36]; Klein [53]; Mizkjewitsch [62]; Schwinger [78, 79]; Tomonaga [83, 84]; Thirring [81]; Umezawa [96]; Wigner [100, 101]; De Witt [102].

VI. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellte sich das Ziel, den Nachweis zu erbringen, daß die folgerichtige Verallgemeinerung der dynamischen Größen, insbesondere die der Energie, der Speziellen Relativitätstheorie durch die Ausdrücke

$$P = P\,(\xi^i, \Omega, T_{jk}, g_{nm}) = -\int \xi^i\, T_{ik}\, \underline{a}\, d\,x^k$$

gegeben ist.

Diese Behauptung konnte u. a. durch folgende Argumente gestützt werden:

1. Die Übereinstimmung mit der Speziellen Relativitätstheorie, falls g_{nm} die Minkowskische Metrik bedeutet.
   a) Sind ξ^i mit $\xi^i\,\xi_i = -1$ die nach vorwärts gerichteten normierten Tangenten der Weltlinien einer Schar von Beobachtern, so ist $P(\xi^i, \Omega)$ die von ihnen beobachtete Energie bei Messung auf der raumartigen Hyperfläche Ω.
   b) Durchläuft ξ^i die zu den infinitesimalen Transformationen der Lorentz-Gruppe gehörenden Killing-Vektoren, so ergeben die $P(\xi^i, \Omega)$ gerade die zehn allgemeinen Integrale der Speziellen Relativitätstheorie. Wir erhalten also die Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt. Damit sind bekanntlich die allgemeinen Erhaltungssätze für dynamische Größen erschöpft.
2. Die Eigenschaften der $P(\xi^i, \Omega)$ spiegeln die tatsächlichen Erfahrungen über die Erhaltungssätze wider:
   a) Die Erhaltung der Energie wird stets beobachtet, wenn sich die Beobachter in einem Inertialsystem befinden. Das heißt wenn jedes kräftefreie Probeteilchen (d. h. ein Teilchen, das sich auf einer Geodätischen bewegt) als unbeschleunigt wahrgenommen wird.
   b) Allgemein gilt ein Erhaltungssatz für die $P(\xi^i, \Omega)$, wenn die ξ^i killingsch bezüglich der vorliegenden Metrik sind. Diese Erhaltungssätze gehören somit zu den Isometriegruppen der Metrik.
3. Die Erhaltungssätze für die dynamischen Größen können in zwei Klassen eingeteilt werden.
   α) Allgemeine Integrale:
   $P(\xi^i, \Omega)$ bleibt erhalten, wie immer der Energie-Impuls-Tensor beschaffen ist. Er muß nur divergenzfrei und symmetrisch sein.

   Diese Erhaltungssätze sind an die Symmetrien der Raum-Zeit gebunden. Die maximal mögliche Zahl von (linear unabhängigen) derartigen Erhaltungssätzen ist 10 und diese Zahl wird vom Minkowskischen Linienelement erreicht.

β) $P(\xi^i, \Omega)$ bleibt erhalten bereits dann, wenn $T_{ik}\, \partial^i \xi^k = 0$ ist. Zu jedem Vektorfeld ξ^i gibt es eine (von drei willkürlichen Funktionen abhängende) Gesamtheit von Vektorfeldern $\bar{\xi}^i$, für die $P(\bar{\xi}^i, \Omega)$ erhalten bleibt und $\bar{\xi}^i = \alpha \xi^i$ ist. (Es kann $\alpha > 0$ gefordert werden.)

Die Erhaltungssätze vom Typ β) sind in der Allgemeinen Relativitätstheorie die natürlichen; denn hier bestimmt die Metrik auf Grund der Einsteinschen Gleichungen den Energie-Impuls-Tensor vollständig. Der Begriff des allgemeinen Integrals wird leer, da die Menge der zur Konkurrenz zugelassenen T_{ik} nur den in den Einsteinschen Gleichungen auftretenden Tensor enthält.

4. Die Energie ist vom Bewegungszustand der Beobachter nur über das normierte Tangentenfeld der letzteren abhängig, d. h. nur über ihren Geschwindigkeits-Vierervektor. Analoges gilt für alle dynamischen Größen. Das Vektorfeld ξ^i geht linear in den Ausdruck für die dynamischen Größen ein, wie das unseren Erfahrungen im Gebiet der Speziellen Relativitätstheorie entspricht.

5. Die energieartigen dynamischen Größen $P(\xi^i, \Omega)$ (d. h. $\xi^i \xi_i < 0$) ergeben im Falle einer gekrümmten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit auch die Gravitationsenergie. Ist insbesondere

$$ds^2 = \psi_1\, \delta_{\nu\mu}\, dx^\nu\, dx^\mu - \psi_2\, d x^{02}$$

und

$$\psi_1 = 1 - \frac{2\varphi}{c^2} + \lambda\varphi^2 + \dots$$

$$\psi_2 = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} + \mu\varphi^2 + \dots$$

mit dem durch $\Delta\varphi = 4\pi\gamma\varrho$ bestimmten Newtonschen Potential φ, so ist

$$E = c^2 \int \varrho\, dV - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\operatorname{grad} \varphi)^2\, dV + \langle \varphi^3 \rangle$$

wobei $\langle \varphi^3 \rangle$ Glieder mindestens dritter Ordnung in φ bezeichnet.

Dieses Resultat besitzt eine angemessene Verallgemeinerung für beliebige Metrik (Satz 10).

6. Die generalisierten dynamischen Größen können den einparametrigen, auf kanonische Parameter bezogenen Transformationsgruppen der Raum-Zeit eineindeutig zugeordnet werden.

Diese Zuordnung erfährt ihre tiefere Begründung außer durch den Zusammenhang mit dem Lagrange-Formalismus besonders einprägsam durch die Vertauschungsrelationen der Quantentheorie. Sind $\underline{P}(\xi^i, \Omega)$ die entsprechenden Operatoren, so ist

$$\sigma(\lambda) \longleftrightarrow \xi^i \to \underline{P}(\xi^i, \Omega)$$

eine Darstellung der Lie-Algebra der Transformationsgruppe der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit. Weiter gilt

$$[\Phi, \underline{P}(\xi^i, \Omega)] = i L(\xi^i)\, \Phi \quad \text{auf } \Omega$$

für beliebige lokale quantisierte Felder Φ.

Man beachte, daß das Auftreten von Raum-Zeit-Krümmungen bei der hier gegebenen Definition für die dynamischen Größen auch in der Quantentheorie zu keinerlei Komplikationen führt.

7. Die dynamischen Größen sind von der Wahl von Koordinatensystemen unabhängig. Randbedingungen für Koordinaten werden nicht benötigt. Die dynamischen Größen sind lokalisierbar in dem Maße, wie der Energie-Impuls-Tensor lokale Bedeutung besitzt.

Es scheint dies eine wesentliche Voraussetzung dafür zu sein, daß die dynamischen Größen als Observable angesehen werden können.

8. Zur Bildung der dynamischen Größen sind keinerlei besondere topologische Voraussetzungen für die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit oder für Ω erforderlich. Ihr Wert hängt für lokale Systeme nicht von der Struktur der Raum-Zeit-Welt im Großen ab. Auf der anderen Seite reduziert sich die Energiebilanz eines räumlich geschlossenen Universums nicht auf die triviale Gleichung $E = 0$.

9. Beim Bestehen der Einsteinschen Gleichungen sind die dynamischen Größen Funktionale des metrischen Zustandes im Sinne von Dirac.

Außer den hier und in der Arbeit angeführten Gesichtspunkten gibt es noch einige weitere erwähnenswerte Aspekte:

10. Die dynamischen Größen unterliegen im Gegensatz zu den auf Pseudotensoren gegründeten Ausdrücken keinen starken Erhaltungssätzen, d. h. Erhaltungssätzen, die unabhängig vom Erfülltsein der Feldgleichungen bestehen, also mathematische Identitäten sind. Alle hier auftretenden Erhaltungssätze sind schwach, d. h. von der Struktur, die wir in allen Bereichen der Physik, die nicht mit Pseudotensoren arbeiten, anzutreffen gewohnt sind.

11. Schließlich müssen wir noch das Äquivalenzprinzip erwähnen. Da nach ihm lokal ein Gravitationsfeld einem Beschleunigungsfeld äquivalent ist, gilt Folgendes (Pirani): Entweder man nimmt Energie nur dort an, wo $T_{ik} \neq 0$ ist oder man verzichtet vollständig auf die Lokalisierbarkeit der Energie und der anderen dynamischen Größen mit allen sich hieraus ergebenden merkwürdigen Konsequenzen. Denn aus der bloßen Tatsache, daß etwas beschleunigt ist, folgt noch kein Wert für die Energie („leerer" Fahrstuhl). Wir nehmen hier den ersteren Standpunkt ein. Dies steht nicht im Widerspruch zur Newtonschen Näherung für die Gravitationsenergie; denn

$$-\frac{1}{8\pi\gamma} \int (\operatorname{grad} \varphi)^2\, dV = \frac{1}{2} \int \varrho\varphi\, dV.$$

Übrigens existiert nach Tolman bei statistischen Lösungen der Einsteinschen Gleichungen auch eine Umformung des Einsteinschen Energieintegrals derart, daß nur über Gebiete mit $T_{ik} \neq 0$ integriert wird.

Es sei noch bemerkt, daß in der Arbeit die folgenden beiden Themen nicht behandelt worden sind.

Das erste ist der Zusammenhang der Einsteinschen Feldgleichungen mit den Bewegungsgleichungen. Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen ist es jedoch nicht notwendig, sich auf bestimmte Ausdrücke für die Energie festzulegen.

Der zweite Problemkreis betrifft die Gravitationsstrahlung. Hierbei handelt es sich um mehrere relativ getrennt liegende Fragestellungen wie z. B. a) um das Problem der Fortpflanzung von Störungen des metrischen Feldes, b) um die Stabilität von Bewegungsformen (insbesondere die des Zweikörperproblems), des weiteren c) um die Suche nach periodischen Lösungen (Lösungen mit „Wellencharakter") der Einsteinschen Gleichungen sowie d) um die Eigenschaften wellenartiger Lösungen der linearisierten Gravitationsgleichungen und endlich um die Festlegung des Begriffes „Gravitationsstrahlung" überhaupt. Hierzu kommt jeweils als gesonderte Fragestellung die Auffindung der Energiebilanz, über die man leider experimentell zur Zeit noch nicht aussagen kann. Beispielsweise kann heute niemand mit Sicherheit entscheiden, ob bei der Fortpflanzung von Störungen des metrischen Feldes mit Notwendigkeit auch Energie transportiert wird. Die jeweilige Wahl eines bestimmten Ausdruckes für die Energie bestimmt somit in weitem Maße die Gestalt der Energiebilanz solcher Prozesse.

Es folgt einige Literatur zu anderen Auffassungen über die Energie als die hier vertretene:

Zu Einsteins Energieausdruck:

Bauer [3]; Einstein [24—28]; Freud [33]; Hilbert [38, 39]; Jordan [46]; Klein, F. [50—52]; Laue [56]; Misner and Putnam [61]; Pauli [69]; Schöpf [74]; Schrödinger [75, 76]; Tolman [82]; Weyl [99].

Andere Vorschläge für die Definition der Energie:

Bel [4, 5]; Dirac [20, 21]; Geissler [34] (zu Bels Definition); Goldberg [37]; Infeld [44]; Komar [54]; Landau and Lifshitz [55]; Møller [64, 65, 66]; Pirani [71]; Sachs [73].

Literaturverzeichnis

[1] Alexandrow, A. D., The space-time of the theory of relativity (russisch). In: „50 Jahre Relativitätstheorie", Basel 1956, p. 44.
[2] — Philosophischer Gehalt und philosophische Bedeutung der Relativitätstheorie. Ref. d. Allunionskonf. Akad. UdSSR, Moskau 1958.
[3] Bauer, H., Phys. Zschr. *19*, 163 (1918).
[4] Bel, L., CR. Acad. Sci. Paris *247*, 1094 (1958).
[5] — CR. Acad. Sci. Paris *246*, 3015 (1958).
[6] Belinfante, F., Physica *6*, 887 (1939).
[7] Bergmann, P. G., Phys. Rev. *75*, 680 (1949).
[8] — Phys. Rev. *112*, 287 (1958).
[9] — mit Brunnings, J. H. M., Rev. Mod. Phys. *21*, 480 (1949).
[10] — mit Newmann, E., Rev. Mod. Phys. *29*, 443 (1957).
[11] Bethe, H. A., Schweber, S. S., de Hoffmann, F., Mesons and Fields I. Illinois, New York 1955.
[12] Bochner, S., Yano, K., Curvature and Betti Numbers. Princeton, New Jersey 1953.
[13] Bogoliubov, N. N., Shirkov, D. V., Introduction to the Theory of Quantized Fields. New York — London 1959.
[14] Brill, D. R., Ann. of Phys. *7*, 466 (1959).
[15] Cattaneo, S., Nuovo Cim. *10*, 318 (1958).
[16] — — Nuovo Cim. *11*, 733 (1959).
[17] — — Nuovo Cim. *13*, 237 (1959).
[18] Deser, S., Rev. Mod. Phys. *29*. 417 (1957).
[19] Dirac, P. A. M., Rev. Mod. Phys. *21*, 392 (1949).
[20] — Phys. Rev. Letters *2*, 368 (1959).
[21] — „Gravitationswellen", Ref. d. IX. Tagung d. Nobelpreisträger, Lindau 1959.
[22] Eddington, A., The Mathematical Theory of Relativity. Cambridge 1923.
[23] Ehlers, J., Sachs, R. K., Zschr. Phys. *155*, 498 (1959).
[24] Einstein, A., Entwurf einer Verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. Leipzig-Berlin 1913.
[25] — Ann. d. Phys. *49*, 769 (1916).
[26] — Phys. Zschr. *19*, 115 (1918).
[27] — Berliner Ber. 1918, p. 448.
[28] — „Autobiographisches", in: Philosophen des 20. Jahrhunderts: Albert Einstein. Stuttgart 1951.
[29] Eisenhart, L. P., Riemannsche Geometrie. Princeton 1949.
[30] Fock, V. A., Czech. J. of Phys. *7*, 255 (1957).
[31] — Rev. Mod. Phys. *29*, 325 (1957).
[32] — ЖЭТФ *38*, 108 (1960).
[33] Freud, Ph., Ann. of Math. *40*, 417 (1939).
[34] Geissler, D., Zschr. Naturf. *14*a, 696 (1959).
[35] Gödel, K., Rev. Mod. Phys. *21*, 447 (1949).
[36] Goldberg, J. N., Rev. Mod. Phys. 29, 450 (1957).
[37] — Phys. Rev. *111*, 315 (1958).
[38] Hilbert, D., Göttinger Nachr., math.-phys. Kl. 1915, p. 39.
[39] — Antwort an F. Klein in „Felix Klein, Gesammelte Mathematische Abhandlungen I", p. 553, Berlin 1921.
[40] Hill, E. L., Rev. Mod. Phys. *23*, 253 (1951).
[41] Hoffmann, B., Rev. Mod. Phys. *4*, 173 (1932).
[42] Hund, F., Materie als Feld. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
[43] Ikeda, M., Progr. Theor. Phys. *15*, 1 (1956).
[44] Infeld, L., Ann. of Phys. *6*, 341 (1959).
[45] Jankiewicz, C., Acta Physica Pol. *18*, 21 (1959).
[46] Jordan, P., Schwerkraft und Weltall. Braunschweig 1955.
[47] Kähler, E., Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Leipzig-Berlin 1934.
[48] — Abh. Math. Sem. Hamburg *12*, 1 (1938).
[49] — Algebra und Differentialrechnung. In: Ber. über d. Mathem.-Tagung in Berlin. Berlin 1953.
[50] Klein, F., Felix Klein. Ges. Mathem. Abh. I. 553. Berlin 1921.
[51] — Felix Klein. Ges. Mathem. Abh. I. 568. Berlin 1921.
[52] — Felix Klein. Ges. Mathem. Abh. I. 586. Berlin 1921.
[53] Klein, O., Quantum theory and relativity. In: „Niels Bohr and the Development of Physics." London 1955, p. 96.
[54] Komar, A., Covariant Conservation Laws in General Relativity. Phys. Rev. *113*, 934 (1959).
[55] Landau, L., Lifshitz, E., The Classical Theory of Fields. Cambridge 1942.
[56] von Laue, M., Die Relativitätstheorie. II. Braunschweig 1953.
[57] Lemaître, G., Rev. Mod. Phys. *21*, 357 (1949).
[58] Lichnerowicz, A., Théories Relativistes de la Gravitation et l'Electromagnétisme. Paris 1955.
[59] — Lineare Algebra und lineare Analysis. Berlin 1956.
[60] — Géometrie des groupes de transformations. Paris 1958.
[61] Misner, S. W., Putnam, P., Phys. Rev. *116*, 1045 (1959).
[62] Mizkjewitsch, N. N., Wiss. Zschr. Friedrich-Schiller-Univ. Jena *8*, 341 (1958/59).
[63] Møller, C., The Theory of Relativity. Cambridge 1952.
[64] — Über die Energie nichtabgeschlossener Systeme in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Max-Planck-Festschrift, Berlin 1958.
[65] — Ann. of Phys. *4*, 347 (1958).
[66] — Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. *31*, no. 14 (1959).
[67] Newman, E., Phys. Rev. *114*, 1391 (1959).
[68] Noether, E., Nach. Kgl. Ges. Göttingen 1918, p. 235.
[69] Pauli, W., Relativitätstheorie. In: Enzyklopädie d. Math. Wiss. V, 2 p. 538. Leipzig 1920.
[70] Penfield, R. H., Zatzkis, H., Acta Phys. Austriaca *10*, 261 (1956).
[71] Pirani, F. A. E., Phys. Rev. *105*, 1089 (1957).

[72] Rosenfeld, L., Mémoires de l'Acad. Roy. Belgique *18*, 1 (1938).
[73] Sachs, R. K., , Zschr. f. Phys. *157*, 462 (1960).
[74] Schöpf, H.-G., Ann. d. Phys. *5*, 1 (1959).
[75] Schrödinger, E., Phys. Zschr. *19*, 4 (1918).
[76] — — Space-Time Structure. Cambridge 1954.
[77] Swann, W. F. G., Rev. Mod. Phys. *2*, 243 (1930).
[78] Schwinger, J., Phys. Rev. *74*, 1439 (1948).
[79] — — Phys. Rev. *75*, 651 (1949).
[80] Takeno, H., Uenno, Y., Prog. Theor. Phys. *8*, 291 (1952).
[81] Thirring, W., Einführung in die Quantenelektrodynamik. Wien 1955.
[82] Tolman, R. C., Phys. Rev. *35*, 875 (1930).
[83] Tomonaga, S., Prog. Theor. Phys. *1*, 27 (1946).
[84] — Prog. Theor. Phys. *2*, 100 (1947).
[85] Trautman, A., Bull. Acad. Polonaise Scin. Cl. III *4*, 671 (1956).
[86] — Bull. Acad. Polonaise Scin. Cl. III. *4*, 675 (1956).
[87] — Bull. Acad. Polonaise Scin. Cl. III. *5*, 721 (1957).
[88] — Bull. Acad. Polonaise Scin. Cl. III. *6*, 403 (1958).
[89] — Lectures on General Relativity. King's College, London, May-June 1958.
[90] Ueno, Y., Prog. Theor. Phys. *9*,74 (1953).
[91] Uhlmann, A., Wiss. Zschr. Friedrich-Schiller-Univ. Jena *8*, 247 (1958—1959).
[92] — Wiss. Zschr. Friedrich-Schiller-Univ. Jena *8*, 351 (1958/59).
[93] — Wiss. Zschr. Friedrich-Schiller-Univ. Jena *9*, 67 (1959/60).
[94] — Acta Physica Pol. XIX, 133 (1960).
[95] — Zum Alexandrowschen Aufbau der Relativitätstheorie. Symp. Philosophie-Naturwiss. (Leipzig 1959) Sammelband (im Druck).
[96] Umezawa, H., Quantum Field Theory. Amsterdam 1956.
[97] Yano, K., Ann. of Math. *55*, 38 (1952).
[98] — The Theory of Lie Derivatives and its Applications. Amsterdam 1955.
[99] Weyl, H., Raum — Zeit — Materie. Berlin 1923.
[100] Wigner, E. P., Rev. Mod. Phys. *29*, 255 (1957).
[101] — Relativistic Invariance of Quantum-Mechanical Equations. In: „50 Jahre Relativitätstheorie", Basel 1956, p. 211.
[102] De Witt, B. S., Rev. Mod. Phys. *29*, 377 (1957).

Anmerkungen

1) Wir setzen voraus, daß M von der Klasse C^∞ ist, und somit die in den Transformationsformeln $x^i = f^i(y^k)$ auftretenden Funktionen f^i beliebig oft stetig differenzierbar sind.

2) Ist auf M eine zusätzliche Struktur gegeben (Metrik mit gewissen Homogenitätseigenschaften, „Randbedingungen" für Feldgrößen u. ä.), so kann eine Auszeichnung gewisser Koordinatensysteme relativ zu dieser Struktur eintreten.

3) Die Ausnahmerolle dieser Begriffe wird durch die in dieser Arbeit vorgeschlagene Definition beseitigt.

4) Wir nennen M topologisch trivial, wenn M topologisch dem 4-dimensionalen Zahlenraum äquivalent ist. Es existiert dann ein Koordinatensystem, das ganz M zum Gültigkeitsbereich hat.

5) Wir sehen hier davon ab, daß diese Begriffe teilweise auch durch allgemeinere Strukturen eingeführt werden können, was bei den unitären Feldtheorien ausgenützt wird. Diese Verallgemeinerungen sind jedoch weder eindeutig, noch greifen sie die hier gebrachten Argumente an.

6) Dieser Schluß kann dadurch umgangen werden, daß man Grenzbedingungen für die $\{x^i\}$ im Unendlich-Fernen einführt. (Für topologisch nicht-triviale Mannigfaltigkeiten ist die Integration über Komponenten von Pseudotensoren sowieso sinnlos.) Dieses „Umgehungsmanöver" vernichtet jedoch die Lokalisierbarkeit und die eindeutige Bestimmtheit von h. Wie man unter solchen Umständen h *beobachten*, und somit E angeben kann, ist dann ein unlösbar erscheinendes Problem (s. auch Pirani). Die Energie (5,12) kann dann nur eine Rechengröße, aber keine Observable sein.

7) Dies trifft auch auf die Formel IV(4,1) zu.

8) Da das zu $\sigma(\lambda)$ gehörende Vektorfeld ξ^i killingsch ist, hängt $P(\sigma(\lambda), \Omega)$ nicht von Ω ab.

9) Mit den Bezeichnungen von Thirring enthält (1,4) die Formeln

$$[\underline{P}^k, \underline{P}^i] = 0,$$
$$[\underline{P}^k, J^{nm}] = i(g^{km}\,\underline{P}^n - g^{kn}\,\underline{P}^m),$$
$$[J^{ji}, J^{kl}] = i(g^{ki}\,J^{lj} + g^{il}\,J^{jk} + g^{jk}\,J^{il} + g^{lj}\,J^{ki}).$$

10) Die Formel (1,6) ist ganz allgemein der Hintergrund für die Beziehungen (Bezeichnungen nach Thirring)

$$[\psi^\alpha(x), \underline{P}_k] = i\,\partial_k\,\psi^\alpha(x),$$
$$[\psi^\alpha(x), J_{jk}] = i\,(x_k\,\partial_j - x_j\,\partial_k)\,\psi^\alpha(x) + i S_{k\,j}^{\alpha\beta}\,\psi^\beta(x)$$

(Eingegangen: 4. August 1960)