JA oder NEIN: Ein wenig Quantenlogik

Armin Uhlmann

Die Quantenlogik ist abstrakter als die Quantenphysik: Man kann über Quantenlogik sprechen und ihre Regeln begreifen ohne irgendetwas von Physik zu wissen. Allerdings ist es schwer vorstellbar, daß sie von jemandem erfunden sein könnte, der nichts von Physik versteht.

Da Quantenlogik begreifbar (und somit erlernbar) ist, muß sie sich in die klassische Logik einbetten lassen. Die Existenz solcher Einbettungen ist daher wohl eher trivial, während ihre tatsächliche Konstruktion oft sehr kunstvoll ist. Bei ihnen wird die Menge der klassischen Zustände und Observablen ad hoc, sozusagen per Dekret, eingeschränkt. Dies ist jedoch nicht der Weg, der hier beschritten werden soll.

Ziel meiner Ausführung ist vielmehr eine möglichst elementare Darstellung einfacher Quantenlogiken, die ich - und zwar nur für den vorliegenden Zweck - als *Quantenschalter* bezeichnen werde. Diese Bezeichnung soll ausdrücken, daß in ihnen nur Fragen mit zwei Ausgängen, also nur elementare Alternativen möglich sind.

In der klassischen Logik würde dieser Einschränkung nur ein System genügen, das aus lediglich einer einzigen elementaren Alternative besteht. Diese kann durch Fragen wie 'ja oder nein', 'Eins oder Null', 'richtig oder falsch', ... usw. gegeben sein. Freilich ist ein System, bei dem nur zwei Zustände unterschieden werden, trivial, da es ihm an Struktur mangelt. Interessantere Systeme, wie etwa die Quantenschalter, können viele verschiedene Zustände einnehmen. Dann erweist es sich als notwendig, zwischen *Zuständen* und *beobachtbaren Größen* (*Observablen*) zu unterscheiden, wobei diese beiden Begriffe erst durch ihr Zusammenwirken mit nachprüfbarem Inhalt ausgestattet werden: Ein (physikalisches) System ist verschiedener Zustände fähig, deren Gesamtheit seinen *Zustandsraum* ausmacht. Die Observablen weisen Zuständen Merkmale, Meßwerte zu, die zur Unterscheidung der Zustände dienen. Zwei Zustände dürfen nur dann als verschieden gelten, wenn es Observable gibt, die sie als verschieden zu erkennen erlauben.

Nichts erscheint einleuchtender als die Behauptung, daß mit zwei voneinander unabhängigen Ja-Nein-Fragen eine Observable mit vier Ausgängen, nämlich (ja, ja), (nein, nein), (ja, nein) und (nein, ja) definiert werden kann. Dies ist jedoch nicht notwendigerweise so: Zwei Ja-Nein-Fragen können unverträglich, d.h. simultan nicht abfragbar sein. Bohr hat eine solche Situation mit dem Begriff der *Komplementarität* beschrieben und besonders an dem Observablenpaar *Ort* und *Geschwindigkeit* (bzw. *Impuls*) erläutert.

Danach sind die beiden Fragen: "Befindet sich ein Teilchen an einem vorgegebenen Ort, ja oder nein?" und "Besitzt dieses Teilchen einen vorgegebenen Impuls, ja oder nein?" Alternativen, die zu keiner Observablen zusammengefügt werden können. Denn es sind *komplementäre Fragen.*

Heisenberg hat diese eigenartigen Situationen auf die Nichtvertauschbarkeit derjenigen Größen zurückgeführt, die in den Rechnungen der Physik für die Observablen stehen. Er konnte so eine Art Phänomenologie in eine in sich geschlossene Theorie wandeln.

Da grundsätzlich jede Observable als eine in sich verträgliche Schar von elementaren Alternativen aufgefaßt werden kann, sollte sich die Art und Weise, wie sich in einem konkreten physikalischen System die Observablen verhalten und welche Zustände sie beschreiben, vollständig auf Beziehungen zwischen Ja-Nein-Fragen abbilden lassen. Dies ist ist richtig, und Jordan fand, daß dieser Gedanke auf eine abstrakte Logik, eine *Quantenlogik* führt.

Offenbar sind ihre einfachsten Beispiele solche, bei denen zwei beliebige nicht äquivalente Alternativen zueinander komplementär sind. Das sind die Quantenschalter. (Zwei Observable sind äquivalent, wenn sie sich nur in der Bezeichnung ihrer Ausgänge unterscheiden.) Ein Quantenschalter ist somit ein System, bei dem *jede* Observable einer Ja-Nein-Frage äquivalent ist. Zwei *beliebige*, verschiedene Observable dieses Systems sind daher unverträglich. Sie können *nie* simultan abgefragt werden. Man könnte sagen, sie seien sämtlich im Sinne von Bohr untereinander komplementär. Solche Gebilde kann man mit elementaren Mitteln beschreiben, wenn man auf die Darstellung der Beweisschritte verzichtet.

Um die Existenz von Quantenschaltern (und komplizierteren quantenlogischen Sytemen) unanfechtbar zu machen, muß man nach Born in ihren Aussagen grundsätzliche Unbestimmtheiten zulassen, die von Wahrscheinlichkeiten regiert werden. Diese Wahrscheinlichkeiten müssen innerhalb des jeweiligen (physikalischen oder logischen) Systems unveränderbar sein und dürfen durch Einbettung in ein größeres System höchstens verkleinert, die in Rede stehenden Unbestimmtheiten also höchstens vergrößert werden. Der Erweiterung der klassischen Logik zur Quantenlogik liegt daher die Einführung von Wahrscheinlichkeiten in das Gebäude der Logik zugrunde. Formal geschieht dies so:

Jedem Paar A, B von Zuständen
ist eine Wahrscheinlichkeit $P(A, B)$ zugeordnet.

Eine solche Zuordnung muß gewisse Regeln erfüllen, damit durch sie eine Quantenlogik gegeben wird. Als erste Regel wird $P(A,B) = P(B,A)$ verlangt (*Mikroreversibilität*), obwohl im Prinzip auch ohne sie in sich konsistente Logiken leicht konstruierbar sind. Diese Regel kann genutzt werden, um etwas geometrische Intuition in das Problem zu bringen: Man stellt sich vor, daß im Zustandsraum Geometrie getrieben werden kann und zwei Zustände umso näher beieinander liegen, je größer die zugeordnete Wahrscheinlichkeit ist.

Ein Extremfall ist $P(A,B) = 1$, der mit $A = B$ bedeutungsgleich sein muß. Maximale Entfernung wird hingegen durch $P(A,B) = 0$ ausgedrückt. Dann sagt man, A und B seien *orthogonal.* Für einen Quantenschalter ist zusätzlich zu fordern, daß es zu jedem A *genau* einen zu ihm orthogonalen Zustand gibt. Dieser wird mit $A^\perp$ gekennzeichnet.

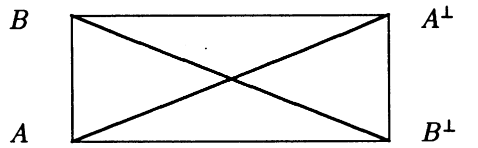
Jetzt kann bereits die letzte Forderung an den Zustandsraum eines Quantenschalters gestellt werden: Für zwei beliebige Zustände A und B gelte immer

$$P(B,A) + P(B,A^\perp) = 1\,.$$

Damit ist man (cum grano salis) in der Lage, recht einfache geometrische Modelle für den Zustandsraum eines jeden denkbaren Quantenschalters anzugeben. Zuerst wird der Satz des Pythagoras benutzt: Einem orthogonalen Zustandspaar A und $A^\perp$ wird ein Punktepaar zugeordnet, das (in einer bequemen Maßeinheit) den Abstand 1 besitzt. Die Gerade zwischen beiden Punkten dient als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen dritter Punkt zum Zustand B gehört. Er liegt auf dem Kreis, für den die Verbindungslinie zwischen A und $A^\perp$ ein Durchmesser ist (Satz von Thales). Bezeichnen x bzw. y den Abstand von B nach A bzw. nach $A^\perp$, so ist die Summe ihrer Quadrate gleich Eins (Pythagoras). Nun setzen wir

$$x = \sqrt{P(B,A^\perp)}, \quad y = \sqrt{P(B,A)}, \quad \text{wobei} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ist.}$$

Die gleiche Konstruktion wird für $B^\perp$ ausgeführt. Es entsteht ein Modell des Zustandsraumes eines Quantenschalters mit vier Zuständen:



Die vier Eckpunkte liegen auf einem Kreis. Jeder gehört nach obiger Konstruktion zu einem rechtwinkligen Dreieck.

Besitzt der Quantenschalter nur vier Zustände, so ist die Konstruktion beendet und ein Modell des Zustandsraumes entstanden. Ist dies nicht der Fall, so sei C ein weiterer Zustand. Die Paare A und B, A und C sowie B und C bestimmen jeweils einen Kreis mit Durchmesser Eins und gleichem Mittelpunkt. Auf jedem dieser Kreise liegen nach dem bisher Gesagten jeweils (mindestens) vier Zustände. Es sind Großkreise auf einer Kugeloberfläche, welche die Punkte A, B und C enthält - allerdings nur, wenn die Strecken AB, BC, CA die Seiten eines Dreiecks bilden können.

Setzt man diesen Gedanken fort, so sieht man, daß jede Punktmenge auf der Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel, die mit jedem Punkt auch ihren Antipoden enthält, der Zustandsraum eines Quantenschalters ist. Auf diese Weise bekommt man eine reiche Auswahl, aber nicht alle Zustandsräume möglicher Quantenschalter[1].

Die in der Physik auftretenden Quantenschalter sind aus komplexen Hilberträumen der Dimension 2 gewinnbar (durch Hopf-Bifurkation ihrer Einheitskugel). Daher haben bei Benutzung obiger geometrischer Modellierung *alle* Zustände auf einer 2-dimensionalen Kugeloberfläche Platz und sie füllen überdies diese Fläche genau aus.

Nachdem mögliche Zustandsräume von Quantenschaltern beschrieben sind, muß über die Observablen verhandelt werden. Bohr, Heisenberg und viele andere behaupten: Wird eine Teilcheneigenschaft gemessen, so verhält sich z.B. das Elektron wie ein Teilchen. Wird nach einer Welleneigenschaft gefragt, verhält es sich so, wie man es von einer Welle erwarten sollte. Nur simultan kann man Teilchen- und Welleneigenschaften nicht haben. Werden aber beide nacheinander abgefragt, so hängen die Resultate von der Reihenfolge ab. Also folgt, daß eine Messung den Zustand des in Rede stehenden Systems wesentlich verändern kann.

Was überhaupt gemessen, beobachtet werden kann, ist in den Observablen des Systems kodiert. Die Ausführung (Beobachtung) einer Observablen erbringt nach den Erfahrungen der Quantenphysik also nicht nur Meßwerte, sie verändert auch den Systemzustand. Diese Veränderung wird partiell vom Zufall regiert, den auszuschließen nicht in unserer Macht steht. Die Beschreibung dieses Sachverhalts und die Struktur der Observablen selbst, ist für Quantenschalter besonders einfach. Die Schwierigkeiten für das Verstehen sind freilich von derselben Qualität wie im Falle der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation. Die Quantenschalter bieten allerdings ein mathematisch weit elementareres gedankliches Experimentierfeld.

Die Observablen, die zu einem Quantenschalter gehören, sind formal sehr einfach zu beschreiben:

Ist A ein Zustand, so gibt es eine Observable O_A mit folgenden Eigenschaften:

a) Ihre möglichen Meßwerte sind $+1$ und -1 .

b) Wird der Meßwert $+1$ ausgegeben, befindet sich das System unmittelbar nach der Messung im Zustand A. Wird der Meßwert -1 angezeigt, so befindet sich das System nach der Messung im Zustand $A^\perp$.

Eine Messung mit der Observablen O_A *zwingt* also das System in einen der beiden Zustände A oder $A^\perp$, welcher Zustand auch immer vor der Messung von O_A eingenommen worden war.

Welcher Meßwert eintritt, welcher der beiden genannten Zustände nach der Messung vorliegt, ist unentrinnbar zufällig, falls sich das System vor der Messung nicht gerade in einem der beiden Zustände A oder $A^\perp$ befunden hat.

[1]Herrn A. Dress, Bielefeld, bin ich für diese Bemerkung, die mich vor einem Irrtum bewahrte, sehr dankbar.

Das Meßresultat ist generisch zufällig, aber der Zufall nicht ohne Regel. Die Regel leitet sich aus den im Zustandsraum kodierten Wahrscheinlichkeiten ab. Wird die Messung bei jeweils gleichem Ausgangszustand oft genug wiederholt, so stabilisiert sich das Verhältnis der Fälle, bei denen $+1$ angezeigt wird, zur Gesamtzahl der Messungen und strebt einem eindeutig bestimmten Wert zu, der *Erwartung* des Meßwertes $+1$.

Die dritte Eigenschaft der Observablen O_A lautet nun:
c) Wird im Zustand B die Observable O_A gemessen, so ist die Erwartung des Meßwertes $+1$ gleich der Wahrscheinlichkeit $P(B, A)$.

Wird also im Zustand B die Observable O_A gemessen, geht das System mit der Wahrscheinlichkeit $P(B, A)$ in den Zustand A und mit der Wahrscheinlichkeit $P(B, A^{\perp})$ in den Zustand $A^{\perp}$ über. Die Wahrscheinlichkeiten P werden aus diesem Grund auch gern als *Übergangswahrscheinlichkeiten* bezeichnet.

Es erweist sich als sehr zweckmäßig, die Meßwerte mit ihren Erwartungen zu multiplizieren und die Resultate zu summieren. Das entstehende gewichtete Mittel aus den Meßwerten heißt *Erwartungswert* der Observablen O_A im Zustand B und ich bezeichne ihn hier mit $O_A(B)$. Es ist

$$O_A(B) = P(B, A) - P(B, A^{\perp}) = 2\,P(B, A) - 1$$

Der kleine axiomatische Ausflug wird nun abgeschlossen mit der Festellung, daß jede mögliche Observable eines Quantenschalters eine Observable der Gestalt O_A ist, bei der lediglich an die Stelle der beiden Meßwerte $+1$ und -1 zwei andere Werte getreten sind.

Ich habe schon erwähnt, daß die Physik offenbar nur eine Art Quantenschalter kennt. Sein Zustandsraum ist die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel vom Durchmesser Eins. Bis auf Äquivalenz werden deshalb die beobachtbaren Größen durch Paare diametral gegenüberliegender Punkte charakterisiert. Durch solch ein Punktepaar geht eine Symmetrieachse der Kugel. Da bei dieser Zuordnung jede Symmetrieachse genau einmal auftritt, können die Observablen auch mittels dieser Achsen indiziert werden - wiederum bis auf Äquivalenz, da damit die Meßwerte noch nicht festgelegt sind.

Man mag sich fragen, wie es wohl kommt, daß in der Physik nur diese eine Art Quantenschalter realisiert ist. Diesem Problem kommt man etwas näher, wenn die zeitliche Evolution quantenphysikalischer Systeme betrachtet wird. Es erscheint natürlich, daß sich dabei die logischen Beziehungen der Zustände untereinander nicht verändern und die Wahrscheinlichkeiten, die dem Zustandsraum des Quantenschalters seine Struktur geben, konstant bleiben. Dann verhält sich der Zustandsraum geometrisch wie ein starrer Körper, dessen Zeitentwicklung durch isometrische Abbildungen auf sich beschrieben werden kann.

Folgt man diesem Argument, so können wegen der Stetigkeit der Zeit die einzelnen Zustandspunkte nicht isoliert liegen. Wird jeder Zustand als logisch gleichwertig angesehen, so wird man zur Annahme geführt, daß es sich bei den Zustandsräumen der Quantenschalter um homogene Räume handeln sollte. Die weiter oben beschriebenen Konstruktionselemente zeichnen dann die Oberflächen von n-dimensionalen

Kugeln mit Durchmesser Eins als die symmetrischsten unter den möglichen Zustandsräumen von Quantenschaltern aus.

Der eindimensionale Kreis kann die zeitliche Evolution durch Drehungen realisieren. Es gibt dann allerdings keinen Fixpunkt. Für konservative Hamiltonsche Bewegungen ist aber zu verlangen, daß das System nach einer Messung der Observablen *Energie* in einen stationären Zustand gelangt.

Dies kann erst auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche realisiert werden. Dort erfolgt die Rotation um diejenige Achse, die den Energieoperator bis auf seine Meßwerte E_1 und E_2 definiert. Um diese Ache dreht sich der Zustandsglobus nach Schrödingers Gleichung mit einer Frequenz $(E_2 - E_1)/\hbar$.

Ist der Zustandsraum aber die 3-dimensionale Oberfläche einer 4-dimensionalen Kugel, so bleibt bei einer zeitlich konstanten starren Rotation ein ganzer Großkreis fest. Dies verhindert möglicherweise seine physikalische Realisierung. Allerdings ist mir keine Untersuchung dieses Quantenschalters bekannt.

Ich will an diese Diskussion noch eine Bemerkung anschließen. In der Definition des Quantenschalters kann man die Forderung nach Existenz von $A^\perp$ zunächst vermeiden und nur, falls es überhaupt ein $A^\perp$ gibt, die Eindeutigkeit der Zuordnung $A \mapsto A^\perp$ verlangen. Ersatzweise muß man dann fordern, daß genügend viele orthogonale Zustandspaare vorhanden sind:

Die *Erwartungswerte* der ihnen zugeordneten beobachtbaren Größen
sollen zur Unterscheidung aller Zustände hinreichend sein.

Ein Beispiel ist der Halbkreis, bei dem die beiden Endpunkte das einzige orthogonale Paar bilden und doch die ihm entsprechende Observable alle anderen Punkte des Zustandsraumes zu unterscheiden gestattet. Es sind wiederum nur elementare geometrische Schlüsse, die zeigen, daß auch die Wahrscheinlichkeiten $P(B, C)$ mit den Erwartungswerten dieser einen Observablen rekonstruiert werden können. Man führt dabei eine Art Navigation im Zustandsraum aus.

Weitere Modelle, die analoge Schlüsse erlauben, sind die halben Oberflächen aller n-dimensionalen Kugeln. Unter ihnen befindet sich als ein physikalisch interessantes Beispiel die Hemisphäre einer 4-dimensionalen Kugel. Ihr Rand ist als zweidimensionale Kugeloberfläche der Zustandsraum eines physikalisch realisierbaren Quantenschalters. Die nähere Betrachtung zeigt, daß man die darauf aufgesetzte 3-Hemisphäre als Raum der *gemischten* Zustände (der Dichteoperatoren eines 2-Niveau Systems) deuten darf.

Beispiele für die physikalische Realisierungen des Quantenschalters, dessen Zustandsraum die 2-Sphäre ist, finden sich in Lehrbüchern (z.B. Feynman Lectures). Als Beispiele seien hier genannt:

1. Das magnetische Moment (bzw. der Spin) des Elektrons, das sich in einem Magnetfeld nur in oder entgegen der Magnetfeldrichtung ausrichten kann. Die Ja-Nein-Fragen werden durch Stern-Gerlach-Versuche realisiert.

2. Die Polarisation des Photons. Hier können Nord- und Südpol als Zustand der rechts- oder links-zirkularen Polarisation definiert werden. Die Punkte des Äquators kodieren linear polarisierte Photonen derart, daß Antipoden auf dem Äquator zu senkrecht aufeinander stehenden linearen Polarisationen gehören. Die übrigen Punkte klassifizieren die elliptischen Polarisationsmoden.

3. Die Paare der Inversionslinien des Ammoniakmoleküls. Die beiden Zustände der Observablen *Energie* bestimmen eine Achse, die auch die Drehachse der zeitlichen Evolution des Zustandsraumes ist. Die Achsen der zu Ja-Nein-Fragen degenerierten Observablen *Ort* und *Geschwindigkeit* stehen zueinander und auf der Energieachse senkrecht.

4. Das Teilchen-Antiteilchen-Problem des Systems der neutralen K-Mesonen. Hier werden Fragen nach dem Verhalten gegenüber der starken bzw. der schwachen Wechselwirkung gestellt, denen zwei zueinander senkrechte Achsen des Zustandsraumes zugeordnet sind. Eine weitere wichtige beobachtbare Größe ist der Zerfall des neutralen K-Teilchen in zwei oder in drei π-Teilchen, die zu einem weiteren orthogonalen Zustandspaar gehört.