Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.Nat. R. 39 (1990)

ARMIN UHLMANN

Über Klein-Gordon-Teilchen bei Robertson-Walker-Metrik

Im folgenden wollen wir eine Methode zur zweiten Quantisierung von Klein-Gordon-Gleichungen, die sich unter dem Einfluß zeitabhängiger äußerer Felder befinden, vorstellen. Als einfaches Beispiel einer solchen Zeitabhängigkeit wählen wir eine Robertson-Walker-Hintergrundmetrik

$$K(t)^2 ds^2 - dt^2 \tag{1}$$

auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, die das direkte Produkt eines Zeitintervalls mit einem kompakten, n-dimensionelan *Riemann*schen Raum $\mathfrak{R}$ mit Linienelement ds ist. Die Kompaktheit erspart uns die Erörterung von Randbedingungen und die Behandlung kontinuierlicher Spektren, da der Laplace-Beltrami-Operator Δ von $\mathfrak{R}$ rein diskretes Spektrum und glatte Eigenfunktionen besitzt. Mit Ausnahme der Ruhemasse $\varkappa$ der Klein-Gordon-Teilchen, die als äußerer Parameter eingeht, sind alle Größen durch die Geometrie des Problems bestimmt. Es wird gezeigt werden, daß das Wachstum von K die Ruhemasse kritische begrenzt. In natürlichen Einheiten muß

$$\varkappa > \frac{n}{2} | \dot{K} K^{-1} | \qquad \text{für} \quad n = \dim \mathfrak{R} > 1 \tag{2}$$

gelten. Gleichheit in (2) führt auf ein Infrarotproblem, die Umkehrung der Ungleichung auf die Instabilität von endlich vielen niederenergetischen Moden. (Nähert man sich einer Singularität, so werden daher nacheinander alle Moden instabil.)

Bezeichne $\mathfrak{L}$ den linearen Raum der komplexwertigen glatten Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

$$(- K^{-2} \Delta + \varkappa^2)\phi + n(\dot{K}/K)\dot{\phi} + \ddot{\phi} = 0 \tag{3}$$

Das in $\mathfrak{L}$ definierte t-unabhängige innere Produkt schreiben wir

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{i}{2} \{ \langle \phi_1, \dot{\phi}_2 \rangle - \langle \dot{\phi}_1, \phi_2 \rangle \} \tag{4}$$

Dabei ist $\langle .,. \rangle (t)$ das auf $t =$ konst definierte Skalarprodukt

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = K^n(t) \int \bar{\psi}_1 \psi_2 \, dv \tag{5}$$

dv bezeichnet das Volumenelement von $\mathfrak{R}$ und Überstreichen bedeutete komplex Konjugieren. Die Quantisierung erfolgt in zwei Schritten: Zuerst werden abstrakte Operatoren („q-Zahlen") definiert. Dann werden diese in Fock- oder anderen Räumen dargestellt. Jeder glatten Lösung ϕ der Klein-Gordon-Gleichung (3) ordnen wir einen Ausdruck $a(\phi)$ wie folgt zu:

$$\phi \rightarrow a(\phi) \qquad \text{ist komplex-linear in } \phi \tag{6}$$

$$a(\phi)^* = a(\bar{\phi}) \tag{7}$$

$$[a(\phi_1), \; a(\phi_2)] = (\bar{\phi}_1, \phi_2) \tag{8}$$

Die Ausdrücke $a(\phi)$ werden als Erzeugende und (6) bis (8) als definierende Relationen einer *-Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement verstanden. Diese Konstruktion einer CCR-Algebra $\mathfrak{A}$, die eine Variante der *Segal*schen Quantisierung [1] ist, beendet den ersten Schritt. Jetzt ist aber noch unklar, welche $a(\phi)$ eventuell zu Erzeugungs- oder Vernichtungsoperatoren werden. Um diese Frage zu klären, benötigt man eine Zerlegung

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+ + \mathfrak{L}^-, \quad \mathfrak{L}^- = \{\bar{\phi} : \phi \in \mathfrak{L}^+\} \tag{9}$$

des Lösungsraumes von (3) in eine direkte Summe die

$$(\phi, \phi) \geq 0, \quad (\psi, \psi) \geq 0, \quad (\phi, \Psi) = 0, \qquad \text{falls} \quad \phi \in \mathfrak{L}^+, \; \Psi \in \mathfrak{L}^- \tag{10}$$

erfüllt. Betrachtet man dann die Zuordnung (6) nur auf $\mathfrak{L}^+$, so findet man die Erzeugungsoperatoren. Allerdings existieren Zerlegungen (9), (10) in Hülle und Fülle. Das Problem besteht gerade darin, physikalisch und geometrisch ausgezeichnete zu finden [2]. Eine global gültige Teilcheninterpretation kann es nicht geben. Das zeigt z. B. die Streutheorie zwischen asymptotisch *Minkowski*schen Bereichen. Jedoch verbleibt die Möglichkeit einer kanonischen Teilchendefinition zu jedem Zeitpunkt (allgemeiner für jede raumartige Cauchy-Hyperfläche). Um dies auszuführen betrachten wir den durch das Skalarprodukt (5) auf $\mathfrak{N}$ gegebenen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und die in ihm dichte Menge $\mathfrak{D}$ glatten Funktionen. Der Operator

$$H = H(t) = + \sqrt{- K(t)^{-2}\Delta + \varkappa^2} \tag{11}$$

ist samt aller seiner reellen Potenzen auf $\mathfrak{D}$ gut definiert und wesentlich selbstadjungiert; denn sein Quadrat ist strikt positiv und elliptisch. Wir können ihn als „1-Teilchen-Hamiltonoperator zum Zeitpunkt t" ansehen.

Seit X ein beliebiger invertierbarer Operator der $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}$ überführt und $t = t_0$ ein vorgegebener Zeitpunkt. Zu jedem $\psi \in \mathfrak{D}$ gibt es dann genau ein $\phi \in \mathfrak{L}$, das das Anfangswertproblem (Es ist die Ableitung nach der Zeit gleich der Normalableitung!)

$$\phi(t_0) = X^{-1}\psi, \quad \dot{\phi}(t_0) = - i X^* \psi \tag{12}$$

löst und man findet leicht

$$(\phi, \phi) = \langle\psi, \psi\rangle (t_0) \tag{12a}$$

Dies zeigt, daß (12) eine isometrische Abbildung $l(t_0)$ von $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{L}$ bestimmt, deren Bild eventuell als $\mathfrak{L}^+$ dienen kann. Man wird nun eine „universelle" Form von X vermuten. Wenn man dies postuliert, so langt es, sie für den Fall des Minkowski-Raumes zu kennen.

Dies einfache Argument liefert

$$X = H(t_0)^{1/2} \tag{13}$$

Gilt (12) und (13), so schreiben wir

$$\phi = l(t_0)\,\psi \tag{14}$$

Man zeigt leicht, daß das Bild $\mathfrak{L}^+$ von $\mathfrak{D}$ unter $l(t_0)$ eine Zerlegung (9), (10) bewirkt.

Bemerkungen:

A) Die Gestalt von X kann aus folgenden Annahmen hergeleitet werden: 1. X ist eine Funktion des Energieopoerators (11). 2. Diese Funktion ist reell. Denn nur dann wird eine Umkehrung der Zeitorientierung durch den Übergang zum Komplex-Konjugierten kompensiert. 3. Die Teilchenerzeugungsprozesse werden minimiert. In [3] wurde dieses Vorgehen für Klein-Gordon-Gleichungen mit diskreter Zeitskala erprobt. B) Daß es auch für den Minkowski-Raum andere Quantisierungen der Klein-Gordon-Gleichung gibt, wurde in [4] bemerkt. Jede von (13) verschiedene Wahl bedingt ein zeitabhängiges Fock-Vakuum. Ist aber K in (1) nicht zeitlich konstant, so ist die Zeitabhängigkeit des Fock-Vakuums nicht vermeidbar. C) Gilt (12) und (13) im Minkowski-Raum, so besitzt ϕ nur eine positiven Frequenzanteil und ψ ist nach *Newton* und *Wigner* [5] die (*Schrödinger*sche) Ortsamplitude.

Wir sind nun in der Lage, zu jedem $\psi \in \mathfrak{D}$ und jedem Zeitpunkt t_0 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eindeutig zu definieren. Die wegen (7) zueinander adjungierten Operatoren

$$a^+(\psi, t_0) = a(\phi), \quad a^-(\psi, t_0) = a(\bar{\phi}) \qquad \text{mit} \quad \phi = l(t_0)\psi \tag{15}$$

unterliegen wegen (8) und (12a) den Vertauschungsregeln

$$[a^-(\psi_1, t), a^+(\psi_2, t)] = \langle\psi_1, \psi_2\rangle(t) \tag{16}$$

Es gibt daher genau einen Fockzustand ω_t der CCR-Algebra $\mathfrak{A}$, der mit der Definition (15) verträglich ist. Seine GNS-Darstellung ist der zu t = konst gegebene Fockraum, wobei, ω_t durch das Fockvakuum realisiert wird. Die zu verschiedenen Zeiten i. A. verschiedenen Fockzustände können durch Automorphismen von $\mathfrak{A}$ ineinander übergeführt werden, die durch *Bogoljubov*sche Transformationen induziert werden.

Bemerkungen.

A) Ist K zeitlich variabel, so ist das Fockvakuum zeitabhängig. In der Regel ist es dann in der Natur nicht realisiert. Denn an einem vorgegebenen Zeitpunkt bedürfte es einer genauen „Feinbestimmung" des Zustandes, um zu einer anderen Zeit das zu ihr gehörende Fockvakuum „einzustellen". Und es würde im nächsten Augenblick durch Erzeugungsprozesse zerstört.

B) Eine besondere Situation entsteht, wenn alle ω_t in einer einzigen Darstellung als zyklische Vektoren darstellbar sind; denn dann können die *Bogoljubov*schen Transformationen unitär realisiert werden. Das Problem ist dem in [6] gelösten verwandt.

Sei ψ eine reelle (!) Eigenfunktion von Δ. Die Lösungen von (3) der Form $\phi = g(t)\psi$ bilden dann einen 2-dimensionalen Unterraum von $\mathfrak{L}$. In diesem Raum liegen $\phi_j = l(t_j)\psi$ für beliebige Zeiten t_j. Folglich existiert eine Relation

$$\phi_1 = (K(t_1)/K(t_0))^{n/2}\,(A(t_1, t_0)\phi_0 + B(t_1, t_0)\bar{\phi}) \tag{17}$$

wobei der K-Faktor die nach (5) zeitabhängige Normierung berücksichtigt. Dies garantiert

$$|A|^2 - |B|^2 = 1, \quad A(t, t) = 1, \quad B(t, t) = 0 \tag{18}$$

Geht man von (17) zur Differentialgleichung über, so kann man diese explizit angeben. Ist $E = E(t)$ der Eigenwert von $H(t)$, so entsteht nach einigen Rechnungen unter Beachtung von (15)

$$\dot{\mathbf{a}}^+(\psi, t) = iE\mathbf{a}^+(\psi, t) - \frac{1}{2}(\dot{E}E^{-1} + n\dot{K}K^{-1})\,\mathbf{a}^-(\psi, t) \tag{19}$$

Diese Rechnung kann man auch für beliebige X ausführen und sich an dem deutlich komplizierten Resultat von der besonderen Rolle des Ansatzes (13) überzeugen. Man kann die Linearität (6) nutzen, um (19) wesentlich zu verallgemeinern; denn Δ besitzt in $\mathfrak{D}$ ein vollständiges Orthogonalsystem von reellen Eigenfunktionen. Sei

$$G = \frac{1}{2}(\dot{H}H^{-1} + n\dot{K}K^{-1}) \tag{20}$$

Der Operator G ist beschränkt, da aus (11)

$$|\dot{H}H^{-1}| = |\dot{K}K^{-1}| \tag{21}$$

gefolgert werden kann. Ist nun ψ beliebig aus $\mathfrak{D}$, so gilt

$$\dot{\mathbf{a}}^+(\psi, t) = i\,\mathbf{a}^+(H(t)\psi, t) - \mathbf{a}^-(G(t)\bar{\psi}, t) \tag{22}$$

Jetzt kommen wir noch zum Hamiltonoperator $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ der zweiten Quantisierung. Er wird für beliebige $A \in \mathbf{A}$ durch die Gleichung

$$i\,dA/dt = [A, \mathbf{H}(t)], \tag{23}$$

die für $A = \mathbf{a}^+(\psi, t)$ in (22) übergeht, bis auf ein zu addierendes Vielfaches des Einsoperators eindeutig bestimmt.

Während (11) nur die Einbettung von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ zu einem gegebenen Zeitpunkt berücksichtigt, werden durch (23) die Führungskräfte, die durch die Veränderung dieser Einbettung entstehen müssen, einbezogen. (Man denke an einen Kreiring im Minkowski-Raum, an den Teilchen gebunden sind und dessen Radius vorgegeben verändert wird – den einfachsten Fall aus unserem Problemkreis.)

Um (23) zu lösen wird aus $\mathfrak{D}$ ein bezüglich (5) vollständiges Orthonormalsystem $\psi_1, \psi_2, \cdots$ ausgewählt. Die von der gewählten Zeit abhängende Normierung dieser Vektoren und auch der Operatoren wird in der folgenden Formel nicht angezeigt.

$$\mathbf{H} = \sum \langle\psi_j, H\psi_k\rangle\, \mathbf{a}^+(\psi_j)\,\mathbf{a}^-(\psi_k) + \tag{24}$$

$$+ \sum \frac{i}{2}\langle\psi_j, G\psi_k\rangle\,[\mathbf{a}^-(\bar{\psi}_j)\,\mathbf{a}^-(\psi_k) - \mathbf{a}^+(\psi_j)\,\mathbf{a}^+(\bar{\psi}_k)]$$

Ihre Struktur sichert die Unabhängigkeit des Ausdrucks von der Wahl der ψ_j. Indem man die in

(19) benutzte reelle Eigenfunktion von Δ in das Orthonormalsystem einbezieht, hat man zum Beispiel von (23) lediglich (19) als Folge von

$$i\,\dot{\mathbf{a}}^+ = [\mathbf{a}^+, E\,\mathbf{a}^+\mathbf{a}^- - i\,\frac{g}{2}(\mathbf{a}^+\,\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-\,\mathbf{a}^-)] \tag{25}$$

zu erkennen. Hat man dies getan, so kommt man zur Frage, ob nach geeigneter Addition von Konstanten der Hamiltonoperator (24) ein physikalisch annehmbares Energiespektrum besitzt. Da es sich um eine quadratische Form handelt, kann man sie beantworten. Indem man in (24) reelle Eigenfunktionen von Δ benutzt, hat man eine Summe von Ausdrücken zu untersuchen, wie sie in (25) auftreten. Dabei sieht man: Bei $E < g$ ist das Spektrum die ganze, bei $E = g$ ein von unten beschränkter Teil der reellen Achse. Ist aber $E > g$ oder, was für $n > 1$ gleichbedeutend ist, Ungleichung (2) erfüllt, so sichert dies energetische Stabilität. Wir können dann Operatoren $\mathbf{b}^+$, $\mathbf{b}^-$ für Quasiteilchen so einführen, daß

$$E\,\mathbf{a}^+\,\mathbf{a}^- - i\,\frac{g}{2}(\mathbf{a}^+\,\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-\,\mathbf{a}^-) + C = E^{\mathrm{ren}}\,\mathbf{b}^+\,\mathbf{b}^- \tag{26}$$

Um dies zu explizieren führen wir die Abkürzungen

$$4\,\xi = \ln(E + g) - \ln(E - g) \tag{27}$$

ein. Dann wird (26) durch

$$\mathbf{b}^+ = \mathbf{a}^+ \cosh\xi + \mathbf{a}^-\, i \sinh\xi, \quad \mathbf{b}^- = (\mathbf{b}^+)^* \tag{28}$$

mit

$$E = E^{\mathrm{ren}} \cosh(2\xi) \tag{29}$$

gewährleistet. Man sieht, daß das asymptotische Verhalten der ursprünglichen und der renormierten Energieeigenwerte gleich ist. Es existieren daher auch die kanonischen (Gibbschen) Zustände und neben der energetischen ist auch die thermodynamische Stabilität gesichert.
Ist (2) nicht erfüllt, so kann dies vielleicht auf notwendige Rückkopplung zum Gravitationsfeld hinweisen. Hinreichend wäre auch ein Mechanismus, der die mittlere Teilchenzahl begrenzt; denn dann führte thermodynamisch ein großkanonischer Ansatz

$$\exp - \beta \sum E^{\mathrm{ren}}\,\mathbf{b}^+\,\mathbf{b}^- + \mu\mathbf{a}^+\,\mathbf{a}^-$$

zur Existenz der Spur und somit zum Ziel.

Literatur

[1] a) I. E.: Mathematical Problems of Relativistic Physics, Am. Math. Soc., Providence, 1963.
b) *Schweber, S. S.:* Relativistische Quantenmechanik. In: Margenau/Murphy, Die Mathematik für Physik und Chemie, II, B. G. Teubner Verl. 1966.
c) *Reed, M.* and *Simon, B.:* Methods of Modern Mathematical Physics. Part II: Fourier Analysis, Self-Adjointness, Academy Press, 1975.
[2] a) *De Witt, B. S.:* Phys. Rep. *19C* (1975) 295.
b) *Kay, B. S., Wald, R. M.:* Some recent developments related to the Hawking effect. Proc. XV DGM conference, World Sci. Publ. 1987, 28–40.
c) *Haag, R., Narnhofer, H., Stein, U.:* Commun. Math. Phys. *94* (1984) 219.
[3] *Hamdan, N., Uhlmann, A.:* Ann d. Phys. *45* (1988) 605
[4] a) *Haag, R.:* Dansk. mat. fys. medd. *29* (1955), No 12.
b) *Wightmann, A. S.:* Introduction to some aspects of relativistic dynamics of quantized fields. Bures-sur-Yvette 1964.
[5] *Newton, R., Wigner, E. P.:* Rev. Mod. Phys. *21* (1949) 400
[6] a) *Dimock, J.:* Math. Phys., *20* (1979) 2549–2555.
b) *Wald, R. M.:* Ann. Phys., *118* (1979) 490–510.

Abstract

A method to second quantize a Klein-Gordon-equation in a Robertson-Walker background is proposed allowing at every instant of time a particular „dressed" particle interpretation.

Verfasser: Prof. Dr. *Armin Uhlmann*, Karl-Marx-Universität Leipzig, Sektion Physik und NTZ, DDR-7010 Leipzig

YU. S. VLADIMIROV, A. O. MIROSHNIK and *A. V. MISHAKOV*

Multi-dimensionsal models of physical interactions

In 80-s a keen interest has been shown in multi-dimensional geometrical models to integrate the general theory of relativity with theories of other physical interactions. We consider these investigations within the scope of solution of the fundamental problem which had been formulated long ago by *E. Mach:* "Warum ist der Raum dreidimensional?" [1]. From searching the physical grounds of just four-dimensionatliy of the studied classical space-time undertaken by *P. Ehrenfest, A. Eddington* and other authors, physicists passed to the concept of multidimensional world to reflect such latent dimensionalities as electromagnetic as well as weak and strong interactions. This concept trend was initiated in *E. Mach*'s hypothesis [1] and began constructively develop in *T. Kaluza*'s work [2], where a five-dimensional theory of gravitation and electromagnetism was suggested. Two trends of investigations have originated from *T. Kaluza*'s work. By the first trend, the multi-dimensional geometry describes not only gravitational and electromagnetic, but the other known physical interactions (weak and strong). The second trend investigates possible effects of a new fundamental geometrical scalar field (scalarism), already predicted in the first *T. Kaluza*'s paper [2]. *P. Jordan* [3] and *E. schmutzer* [4, 5] have made a great contribution to development of the second investigation trend. The present paper consideres the results of the above investigation trends, which have been obtained within the specific approach to multi-dimensionality being developmed in the Moscow State University [6–9].

1. Integrating of gravitation with electroweak and strong interactions within the six- and seven-dimensional geometrical theories.

Statement and solution of such a problem became feasible only after understanding that electroweak and strong interactions were carried out with intermediate vector bosons, as in electrodynamics. As is known, the Weinberg-Salam model of electroweak interactions and chromodynamics had been designed on decline of 60-s — in early of 80-s, on the basis of gauge approach with appropriate group symmetries. This has resulted in the sequent search of geometrically integrated models of Kaluza-Klein theories-type (TKK) to have such additional dimensionalities where group symmetries are performed directly. This signified application of topologies: $M^4 \times S^7$, $M^4 \times S^2$, etc. As a rule, physicists proceeded from manifolds with 11 or 10 dimensions.

Our works suggest alternative approach which is based, first, on sequential analysis of physical capabilities of the 5, 6, 7 ... dimensionality geometrical models. Second, trivial topology $M^4 \times S^1 \times S^1 \ldots$ is used. Third, a number of methods taken from versions of five-dimensional unified theories and the *Weyl*'s theory is applied. Such an approach was found out (without metric